良い強制拡大は位相空間の良い性質を壊さない

嘉田　勝　（大阪府立大学）

2010年11月12日

おしながき

1. 強制拡大とは

- コーエン強制とランダム強制

2. 位相空間の性質の保存

- リンデレーフ空間

3. エンダウメント

- エンダウメントをもつ強制概念で保存される性質（主定理）
- 主定理の証明のアイデア

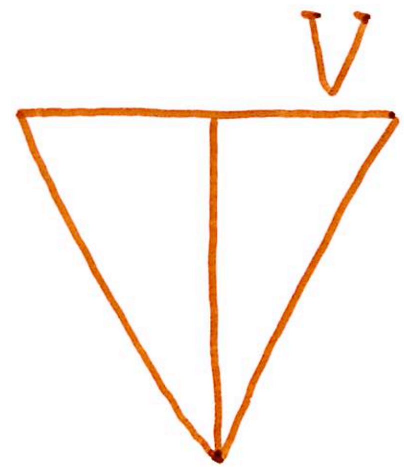
独立性証明とは

数学の世界には、通常の数学的前提のもとでは
証明も反証もできない問題が**たくさん**存在する。

「通常の数学的前提」 = **ZFC集合論**

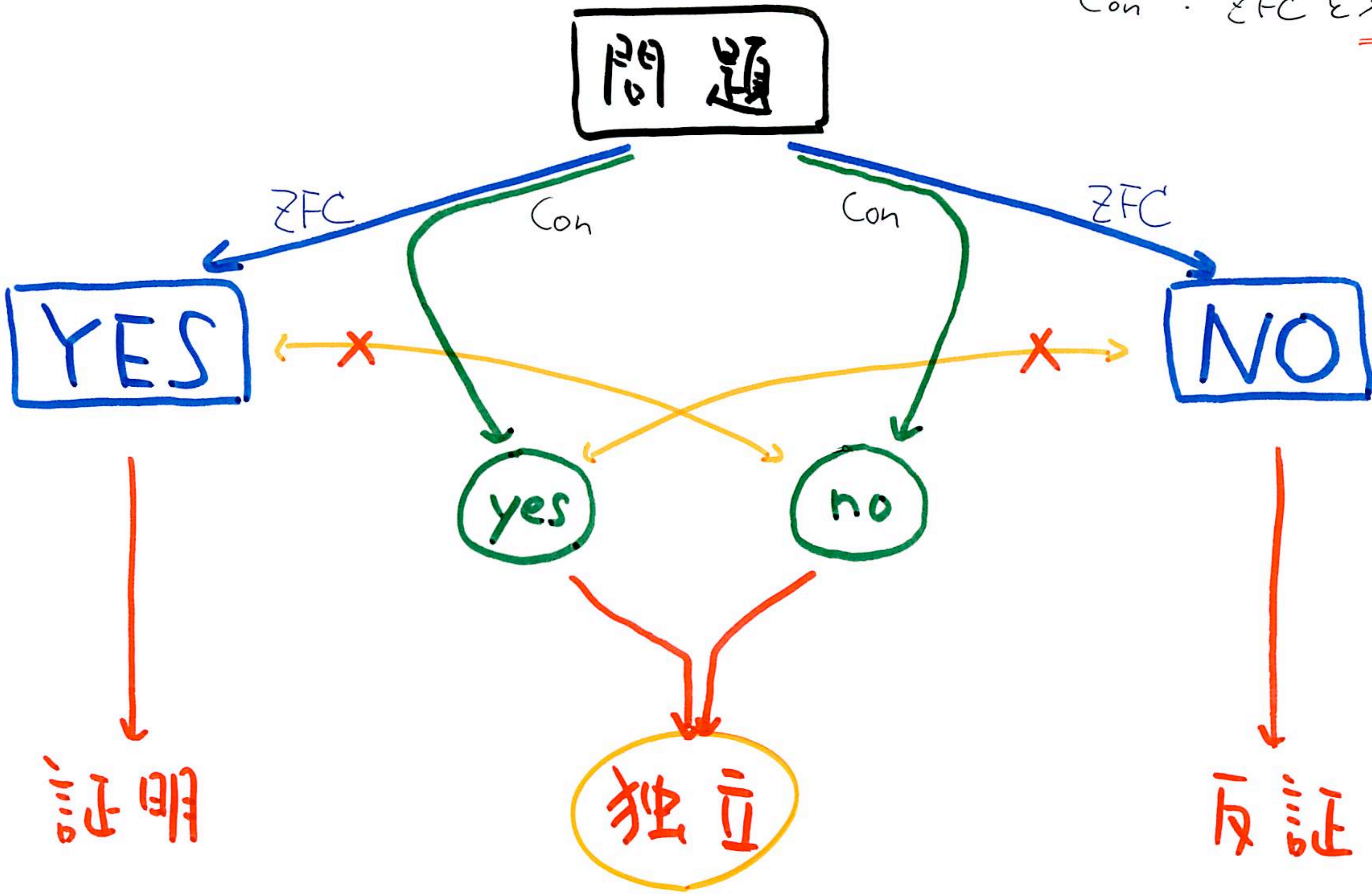
あらゆる数学の議論は、
ZFC集合論における集合操作とみなして
ZFCのモデルの内部で行える。

（直観的には
「すべての集合」からなる数学の宇宙）

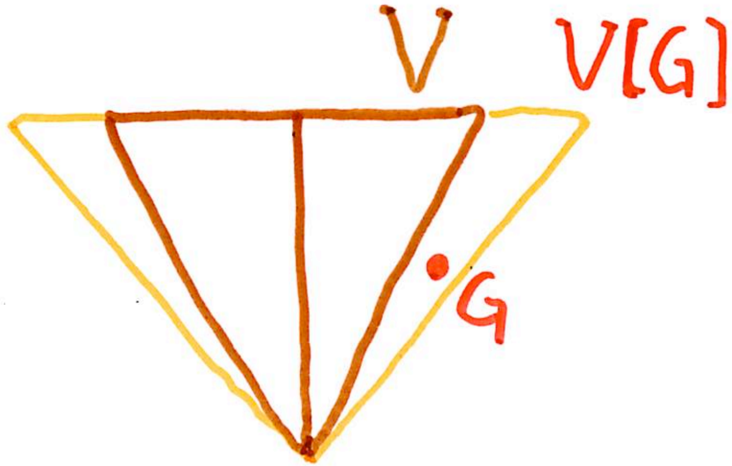


独立性証明とは（つづき）

ZFC ： ZFCで証明可能
Con ： ZFCと矛盾しない



強制拡大とは？ ①ジェネリック拡大



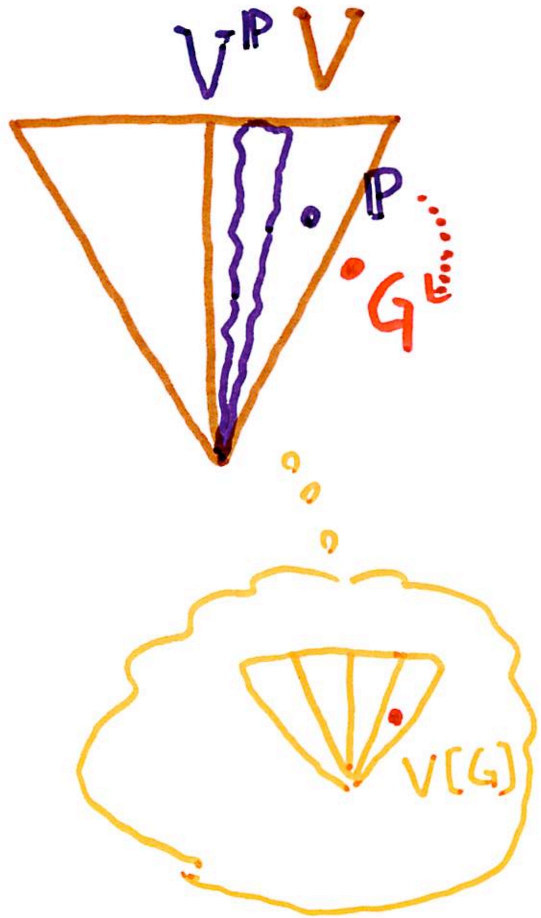
V：ZFCのモデル

（直観的には
「すべての集合」からなる数学の宇宙）

G：Vに属さない「理想元」
（ジェネリックオブジェクト）

V[G]：Gを要素にもつ（最小の）
Vの拡大モデル
（ジェネリック拡大）

強制拡大とは？ ②強制概念と強制法



$\mathbb{P}$: G（ジェネリックオブジェクト）の「部分的な情報」（近似）の全体がなす半順序集合 ＝ 強制概念

$V^{\mathbb{P}}$: V と $\mathbb{P}$ の情報を使って構成される V[G] の「完成予想図」

$\mathbb{P}$, $V^{\mathbb{P}}$ の性質を調べることで、「V[G]で起こっていること」を V の内部で 知ることができる。

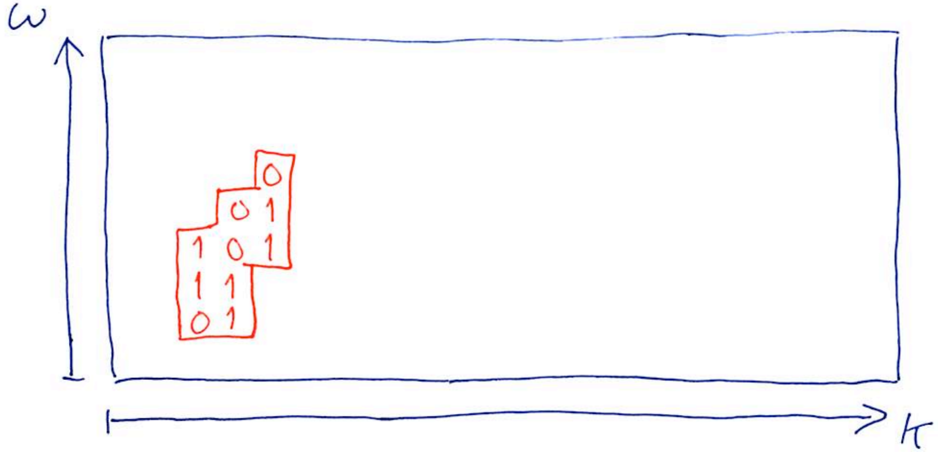
＝ 強制法（forcing）

強制概念の例

① 実数を付加して $c \geq \aleph_2$ を強制

$\mathbb{P}$: $\kappa \times \omega$ から $\{0,1\}$ への有限部分関数の全体

(順序関係は「部分関数としての拡張」)



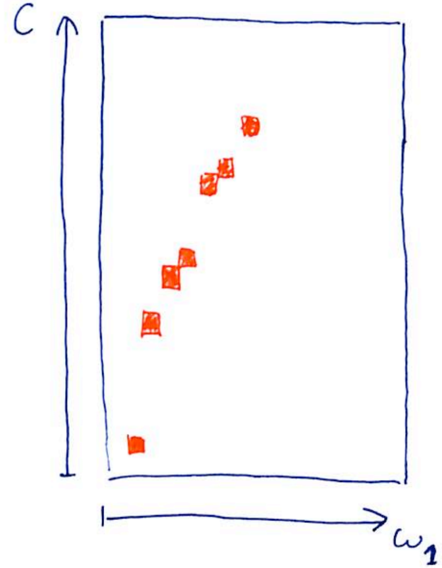
- V にはない(新しい) κ 個の「ω から $\{0.1\}$ への関数」(= 実数) を V に付け加えるジェネリック拡大

- 基数が壊されないことを保証

  (V における基数は $V[G]$ でも基数であり続ける)

強制概念の例　② 基数を壊して $c=\aleph_1$ を強制

V において　$c=|\mathbb{R}|\geq\aleph_2$ が成り立っているとする。

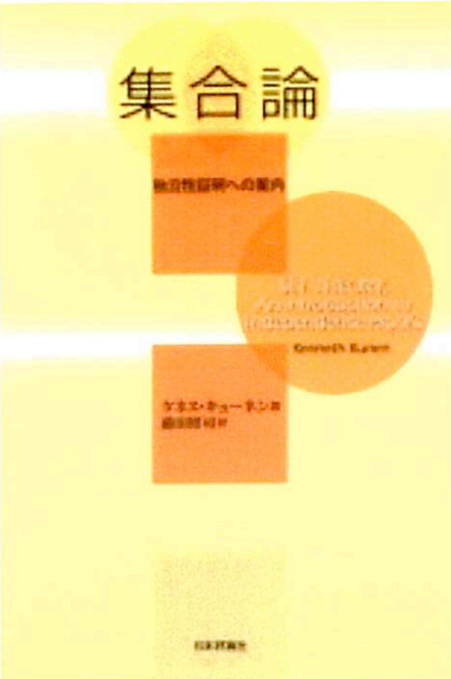


$\mathbb{P}$: ω_1 から c への可算部分関数の全体

順序関係は「部分関数としての拡張」

- V にはない（新しい）「ω_1 から c^V への全射」を付け加えるジェネリック拡大
- V における $\aleph_1<\kappa\leq c^V$ なる基数 κ は、$V[G]$ では基数でなくなる。特に $\boxed{V[G] \text{ では } |c^V|=\aleph_1 \text{ が成り立つ。}}$
- （新しい実数は付け加えられない / $\aleph_1$ は壊されない（基数であり続ける)）ことを保証

もっと詳しく知りたい人は…



『集合論——独立性証明への案内』

ケネス・キューネン著, 藤田 博司 訳
日本評論社 2008年 1月20日
ISBN 978-4-535-78382-9
本体価格4,500円

出版社のサイトへ(別窓)
このページの先頭へ

数学の基本ボキャブラリとしての集合論から一歩を進めて、専門的な研究分野としての集合論を学びたい人のための本。原著は1980年発刊で、以後一貫して、この分野の定番テキストとしての不動の地位を獲得しています。強制法による独立性証明という当該分野の必須のツールを学ぶための必読書で、世界中の集合論の専門家のなかに、この本(原著)を読んでいない人はいないと断言してよいと思います。この名著の誉れ高い原著の語り口の明快さを損なわないように、また、なるべく自然な日本語に訳出するように、けっこう努力しました。

(http://www.tenasaku.com/tenasaku/authorship.html より)

κ個のジェネリック実数を付加する強制法

$\boxed{2^\kappa}$：　$2=\{0,1\}$ の κ 個のコピーの直積

・位相空間として

$\{0,1\}$ に離散位相を入れて直積位相を考える

・測度空間として

0, 1 それぞれに測度 $1/2$ を割り振り、直積測度を考える

2^κ のジェネリックな要素（≃ κ個の実数）を付加する強制概念

位相的近似

基本開集合を狭めて絞り込む

⇩

コーエン強制

測度的近似

測度正の集合を狭めて絞り込む

⇩

ランダム強制

コーエン強制とランダム強制

$\mathbb{C}(\kappa)$ （コーエン強制概念）

- κ から $\{0,1\}$ への有限部分関数全体
（2^κ の基本開集合に対応）

- $p \leq q$ （p は q より「強い」）
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $p \supseteq q$
（部分関数としての拡張 ≃ 基本開集合として「小さい」）

$\mathbb{B}(\kappa)$ （ランダム強制概念）

- 2^κ の測度正の可測集合全体

- $p \leq q$
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $p \setminus q$ は測度 0
（p は q に「ほとんど含まれる」 ≃ 測度正の集合として「小さい」）

位相空間の性質の保存

V　　　　　　　　$V^{\mathbb{P}}$ ($V[G]$)

$(X, \tau) \xrightarrow{\times} (\check{X}, \check{\tau})$

$(X, \tau) \xrightarrow{◎} (\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})$

$\check{\tau}$は$\check{X}$上の位相とは限らない。
(新たなτの部分集合が付け加わっている)

$V[G]$からみた「集合X, τそのもの」

$\tau^{\mathbb{P}}$: $V[G]$において、$\check{\tau}$を開基として生成される
$\check{X}$上の位相

「$\mathbb{P}$が性質φを保存」

$\Updownarrow$ def

「Vで$\underline{(X, \tau)}$がφをみたす $\Longrightarrow$ $V[G]$で$\underline{(\check{X}, \tau^{\mathbb{P}})}$が$\varphi$をみたす」

$\check{X}$ とは何か？

例　$I = [0, 1]$ の連結性、コンパクト性

$\mathbb{P}$：実数を付加

$V \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$　$(V[G])$

$\boxed{I} = [0, 1]$

0　1

連結
コンパクト
↳リンデレーフ

×

○

(定義にもとづいて)

$\boxed{I^{V(G)}} = [0, 1]^{V(G)}$

$V(G)$で再構成された
$[0.1]$・閉区間

0　1

連結
コンパクト

(ZFCで証明可能な性質は
すべて成り立つ。)

$\boxed{\check{I}} = [0, 1] \cap V$

Vにおける「集合 I そのもの」

(Vに存在する実数のみを
要素とする)

0　1

完全不連結
コンパクトでない（が、リンデレーフではある！）

「新しい実数」が稠密に存在

強制拡大で保存される性質、壊れる性質

保存される ⟷ ? ⟷ たやすく壊れる

保存される	?	たやすく壊れる
点列の収束	正規性 (normality)	コンパクト性
ハウスドルフ性	リンデレーフ性	連結性
正則性 (regularity)	パラコンパクト性	次元
	screenability	
	⋮	

「点」と「点の近傍」について語っている

「集合」について語っている

リンデレーフ空間 (Lindelöf spaces)

位相空間 (X, τ) がリンデレーフ空間である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X の任意の開被覆が(高々)可算な部分開被覆をもつ

リンデレーフ空間の例

- コンパクト空間
- 第2可算公理をみたす空間，
  特に，可分距離空間
  ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, …)
- Sorgenfrey 直線

リンデレーフでない空間の例

- 不可算濃度をもつ離散空間
- ω_1 (最小の不可算順序数
  位相は順序位相)
- Sorgenfrey 平面
  (Sorgenfrey 直線2個の直積)

強制拡大でリンデレーフ空間が壊れる例

2^{ω_1} : $2=\{0,1\}$（離散位相）の ω_1 個のコピーの直積

コンパクト，ゆえにリンデレーフ

可算近似で

$\mathbb{P}$: ω_1 から $\{0,1\}$ へのジェネリックな関数を付加する強制概念

（可算部分関数全体からなる半順序集合）

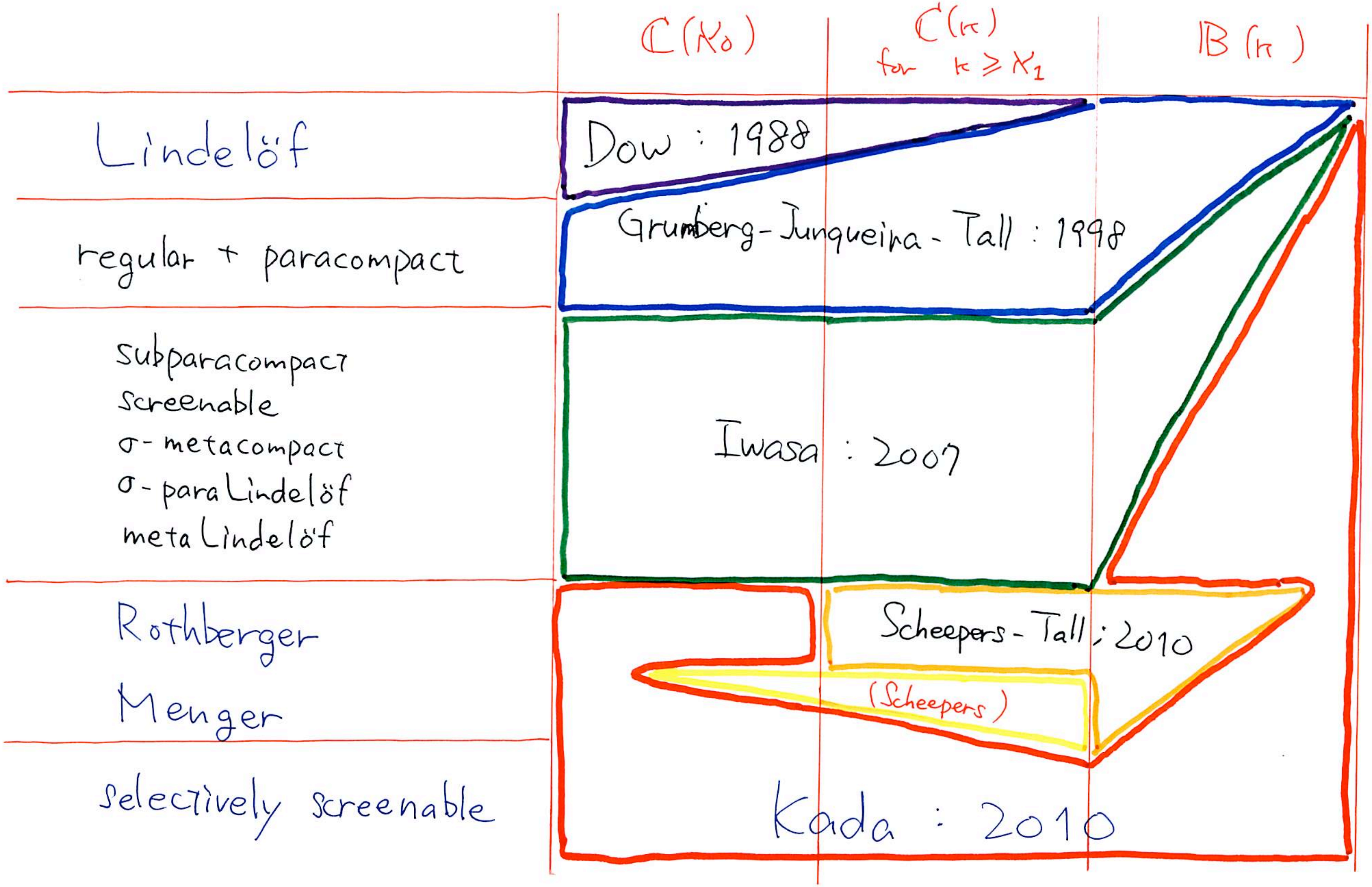
$\mathbb{P}$ による強制拡大 $V^{\mathbb{P}}$ で，$(2^{\omega_1})^V$ はリンデレーフでない。

$\dot{f}$: $\mathbb{P}$ で付加されるジェネリックな関数

$\alpha<\omega_1$ に対し，$\dot{U}_\alpha=\{x\in(2^{\omega_1})^V \mid x(\alpha)\neq\dot{f}(\alpha)\}$ とおくと，

$\{\dot{U}_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ は $(2^{\omega_1})^V$ をカバーするが，可算部分集合ではカバーできない。

位相空間の性質の保存



ℂ(ℵ₀)
ℂ(κ)
for κ ≥ ℵ₁
𝔹(κ)
Lindelöf
regular + paracompact
subparacompact
screenable
σ-metacompact
σ-paraLindelöf
metaLindelöf
Rothberger
Menger
selectively screenable
Dow : 1988
Grumberg-Junqueira-Tall : 1998
Iwasa : 2007
Scheepers-Tall : 2010
(Scheepers)
Kada : 2010

The Rothberger property / The Menger property

- 位相空間 (X, τ) が Rothberger の性質をもつ

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \langle \mathcal{U}_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$: X の開被覆の列

$\exists \langle U_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ s.t. $\begin{cases} \cdot \ \forall n \in \mathbb{N} \ (U_n \in \mathcal{U}_n) \\ \cdot \ \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ は } X \text{ の開被覆} \end{cases}$

- 位相空間 (X, τ) が Menger の性質をもつ

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \langle \mathcal{U}_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$: X の開被覆の列

$\exists \langle \mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ s.t. $\begin{cases} \cdot \ \forall n \in \mathbb{N} \ (\mathcal{F}_n \text{ は } \mathcal{U}_n \text{ の有限部分集合}) \\ \cdot \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \text{ は } X \text{ の開被覆} \end{cases}$

$$\text{Rothberger} \underset{[0,1]}{\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}} \text{Menger} \underset{(\text{irrationals})}{\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}} \text{Lindelöf}$$

エンダウメント ("n-dowment")

定義 (Dow-Tall-Weiss, 1990)

$\mathbb{P}$: 強制概念, $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} \mathbb{P}_n$ (increasing union) に対し,

次をみたす $\langle \mathcal{L}_n : n<\omega \rangle$ を, $\mathbb{P}$ の エンダウメント (の系列) という。

各々の $\mathcal{L}_n$ を, n番めのエンダウメント ("n-dowment") という。

- 各 $\mathcal{L}_n$ は $\mathbb{P}$ の有限な反鎖の集合
- $\forall n \ \forall A : \mathbb{P}$ の極大反鎖 $\exists L \in \mathcal{L}_n \ (L \subseteq A)$
- $\forall n \ \forall p \in \mathbb{P}_n \ \forall L \in \mathcal{L}_n \ \exists q \in L$

  s.t. $\exists r \in \mathbb{P} \ (r \leq p \wedge r \leq q)$

endowment ♦♦◊◊◊ /ɪndaʊmənt/ (**endowments**)
[1] N-COUNT
An **endowment** is a gift of money that is made to an institution or community in order to provide it with an annual income.
[2] N-COUNT: usu with supp
If someone has an **endowment** of a particular quality or ability, they possess it naturally. [FORMAL]
[3] N-COUNT: usu N n
In finance, an **endowment** policy or mortgage is an insurance policy or mortgage which you pay towards each month and which should then provide you with enough money to pay for your house at the end of a fixed period. [BRIT]

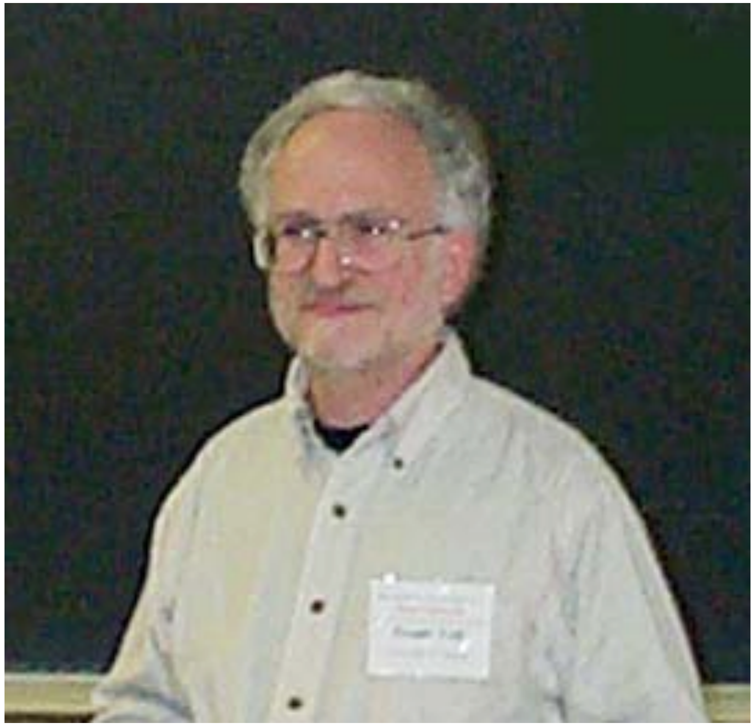
—*COBUILD for Advanced Learner's English Dictionary New digital edition (Collins)*

en·dow·ment /endáʊmənt, ɪn-, ən- | ɪn-, en-, ən-/ 【初 15c; endow+-ment】
［名］
1a ［U］（基金の）寄付（をすること）; 遺贈.
b ［C］（学校・病院などに寄付された）基金, 寄付金 ; 遺産.
2 ［C］《正式》［通例 ～s］（生れつきの）才能, 資質.
3 ［C］《豪》育児手当, 児童手当（child ～).

—ジーニアス英和大辞典（大修館書店）

Why "endowment"?

Alan Dow



Frank Tall

"n-dowment"

Dow's Lemma

補題 $\mathbb{B}(\kappa)$ はエンダウメントをもつ。

(証明) $\mathbb{B}(\kappa) = \bigcup_{n<\omega} B_n$ ただし $B_n = \{p \in \mathbb{B}(\kappa) \mid \mu(p) \geq 2^{-n}\}$

$\mathcal{L}_n$: $\mathbb{B}(\kappa)$ の有限反鎖で（測度の合計）$> 1 - 2^{-n}$ のもの全体の集合

とすればよい。

補題 (Dow's Lemma) (Dow-Tall-Weiss 1990)

$\mathbb{C}(\kappa)$ はエンダウメントをもつ。

$\left(\mathbb{C}(\kappa) = \bigcup_{n<\omega} C_n \right.$ ただし $\left. C_n = \{p \in \mathbb{C}(\kappa) \mid |p| \leq n\} \right)$

主定理

定理 (Kada : 2010)

強制概念 $\mathbb{P}$ がエンダウメントをもつならば、
$\mathbb{P}$ による強制拡大で次の位相空間の性質は保存される。

- Lindelöf (Dow : 1988)
- regular + paracompact (Grunberg-Junqueira-Tall ; 1998)
- subparacompact, screenable, σ-metacompact, σ-paraLindelöf, metaLindelöf (Iwasa ; 2007)
- Rothberger, Menger
- selectively screenable

主定理の証明のアイデア（リンデレーフ性の保存） 1/2

$\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} \mathbb{P}_n$, $\langle \mathcal{L}_n : n<\omega \rangle$: エンダウメントの列　とする。

補題　$\dot{\mathcal{U}}$: $\check{X}$ の開被覆の $\mathbb{P}$-name（その要素のみからなると仮定してない）に対し、

（各 n について）$\mathcal{V}_n$: $\dot{\mathcal{U}}$ の「n 番めの近似」を、次の性質をもつように作れる。

- $\mathcal{V}_n$ は X の開被覆.
- $\forall V \in \mathcal{V}_n \ \forall p \in \mathbb{P}_n \ \exists r \leq p$ s.t. $r \Vdash_{\mathbb{P}} \exists U \in \dot{\mathcal{U}} (\check{V} \subseteq U)$.

定理　X がリンデレーフ空間 $\Longrightarrow$ $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\check{X}$ はリンデレーフ空間"

（証明）各 n について $\mathcal{W}_n$ を $\mathcal{V}_n$ の可算部分開被覆, $\mathcal{W} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{W}_n$ とすると,

$\forall x \in X \ \forall p \in \mathbb{P} \ \exists r \leq p \ \exists V \in \mathcal{W}$ s.t. $\begin{cases} \cdot\ x \in V \\ \cdot\ r \Vdash \exists U \in \dot{\mathcal{U}} (\check{V} \subseteq U) \end{cases}$

が成り立つ。この性質を使うと、$V^{\mathbb{P}}$ で $\dot{\mathcal{U}}$ の可算部分開被覆を作れる。

主定理の証明のアイデア（リンデレーフ性の保存）2/2

（補題の証明）$\dot{\mathcal{U}}$, n を固定。 $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{\mathcal{U}} \subseteq \tau$" と仮定。

$\boxed{\text{各 } x \in X \text{ について}}$, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\exists W \in \dot{\mathcal{U}}\ (x \in W)$" だから，

$\left\{ \begin{array}{l} A_x \subseteq \mathbb{P} \ :\ \mathbb{P} \text{ の極大反鎖} \\ \text{各 } p \in A_x \text{ について，} W_{x,p} \end{array} \right.$ を，

各 $p \in A_x$ について $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\check{x} \in \check{W}_{x,p} \in \dot{\mathcal{U}}$" をみたすようにとる。

$L_{x,n} \in \mathcal{L}_n$ を，$L_{x,n} \subseteq A_x$ をみたすようにとる。

V^n_x を，$V^n_x = \bigcap \{ W_{x,p} \mid p \in L_{x,n} \}$ で定める。

$\mathcal{V}_n = \{ V^n_x \mid x \in X \}$ と定める。これは X の開被覆で，しかも，

（n 番めの）エンダウメント $\mathcal{L}_n$ の性質により，

$$\forall V \in \mathcal{V}_n\ \ \forall p \in P_n\ \ \exists r \leq p \ \text{ s.t. } \ r \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“} \exists U \in \dot{\mathcal{U}} (\check{V} \subseteq U) \text{”}$$

が成り立つ。