On the complete relative cohomology of Frobenius extensions

野 澤 武 司 (Takeshi Nozawa)
長岡工業高等専門学校
Nagaoka National College of Technology

1. 序

K を可換環とし、Λ が Frobenius K- algebra であるとき、[4] にあるように、complete cohomology $\mathrm{H}^r(\Lambda, -)$ $(r \in \mathbf{Z})$ が定義される。これについては [4] や [6],[7] などで研究されているが、少し一般化して、Λ がその部分環の Frobenius extension の場合はどうなるだろうか？この小文ではその場合について [5] で得られた結果を報告したい。

2.Complete relative cohomology

K を可換環、Λ を K- algebra, Γ をその subalgebra とし、環の拡大Λ/Γ が Frobenius extension とする。P を enveloping algebra $\Lambda \otimes_K \Lambda^o$ とし、自然な準同型写像 $\Gamma \otimes_K \Gamma^o \to \Lambda \otimes_K \Lambda^o$ の像を S とおくと、S は P の部分環になり、環の拡大 P/S は Frobenius extension になる。Λ を左 P-加群と見て、[2] で紹介されている Λ の complete (P, S)-resolution

$$
\begin{array}{c}
\cdots \to X_s \xrightarrow{d_s} X_{s-1} \to \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \cdots \to X_{-s} \xrightarrow{d_{-s}} X_{-(s+1)} \to \cdots \\
\varepsilon \searrow \quad \nearrow \eta \\
\Lambda
\end{array}
$$

をとる（ε は全射, η は単射の準同型写像である。Λ の complete (P, S)-resolution とはこのような形の 各 左 P-加群 X_r $(r \in Z)$ が (P, S)-projective な (P, S)-exact sequence のことである)。M を左 P-加群として、この complete (P, S)-resolution より chain complex

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}({}_PX_1, {}_PM) \overset{{d_1}^*}{\leftarrow} \mathrm{Hom}({}_PX_0, {}_PM) \overset{{d_0}^*}{\leftarrow} \mathrm{Hom}({}_PX_{-1}, {}_PM) \overset{{d_{-1}}^*}{\leftarrow} \cdots$$

を得る。ただし、$f \in \mathrm{Hom}({}_PX_{r-1}, {}_PM)$ に対して、${d_r}^*(f) = f \circ d_r$ である。この chain complex より complete relative cohomology group を

$$\mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, M) = \mathrm{Ker}\ {d_{r+1}}^*/\mathrm{Im}\ {d_r}^* \qquad (r \in \mathbf{Z})$$

により定義する。環 Λ の中心を $Z(\Lambda)$ とおくと、$\mathrm{Hom}({}_PX_r, {}_PM)$ が $Z(\Lambda)$-加群だから、$\mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, M)$ も $Z(\Lambda)$-加群である。

環の拡大 Λ/Γ は Frobenius extension なので、dual projective pair と呼ばれる Λ の元 $r_1, \ldots, r_n, l_1, \ldots, l_n$ と Frobenius homomorphism と呼ばれる両側 Γ-準同型写像 $h \in \mathrm{Hom}({}_\Gamma\Lambda_\Gamma, {}_\Gamma\Gamma_\Gamma)$ が存在し、任意の $x \in \Lambda$ に対して、$x = \sum_{i=1}^{n} h(xr_i)l_i = \sum_{i=1}^{n} r_i h(l_i x)$ となるが、このとき、次が成り立つ。

定理１（[5]）任意の左 P-加群 M に対して、$M^\Lambda = \{m \in M | xm = mx \text{ for all } x \in \Lambda\}$, $M^\Gamma = \{m \in M | xm = mx \text{ for all } x \in \Gamma\}$, $N_{\Lambda/\Gamma}(M) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i m l_i | m \in M^\Gamma\}$ とおくとき、同型

$$\mathrm{H}^0(\Lambda, \Gamma, M) \simeq M^\Lambda / N_{\Lambda/\Gamma}(M)$$

が成り立つ。

この定理の証明は具体的な Λ の complete (P, S)-resolution から $\mathrm{H}^0(\Lambda, \Gamma, M)$ を構成することによって直ちに証明される。

2.Cup 積

[6] において、Frobenius algebra の complete cohomology に cup 積が定義されているが、Frobenius extension の complete relative cohomology についても次のように定義される。

定義１（[5]）A, B を任意の左 P-加群とし、r, s を任意の整数とする。任意の元 $\alpha \in \mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, A)$, $\beta \in \mathrm{H}^s(\Lambda, \Gamma, B)$ に対して、元 $\alpha \cup \beta \in \mathrm{H}^{r+s}(\Lambda, \Gamma, A \otimes_\Lambda B)$ が存在し、次の条件 (i) 〜 (iv) を満たすとき、$\cup$ を cup 積と言う。

(i) $\cup$ は $Z(\Lambda)$-準同型写像

$$\mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, A) \otimes_{Z(\Lambda)} \mathrm{H}^s(\Lambda, \Gamma, B) \xrightarrow{\cup} \mathrm{H}^{r+s}(\Lambda, \Gamma, A \otimes_\Lambda B)$$

を引き起こす。

(ii) $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ を (P, S)-exact sequence とする。左 P-加群 B に対して、$0 \to A_1 \otimes_\Lambda B \to A_2 \otimes_\Lambda B \to A_3 \otimes_\Lambda B \to 0$ が (P, S)-exact ならば 任意の $\alpha \in \mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, A_3)$, $\beta \in \mathrm{H}^s(\Lambda, \Gamma, B)$ に対して、$\partial(\alpha \cup \beta) = \partial(\alpha) \cup \beta$ が成り立つ。ただし、∂ は connecting homomorphism を表すものとする。

(iii) $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$ を (P, S)-exact sequence とする。左 P-加群 A に対して、$0 \to A \otimes_\Lambda B_1 \to A \otimes_\Lambda B_2 \to A \otimes_\Lambda B_3 \to 0$ が (P, S)-exact ならば 任意の $\alpha \in \mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, A)$, $\beta \in \mathrm{H}^s(\Lambda, \Gamma, B_3)$ に対して、$\partial(\alpha \cup \beta) = (-1)^r \alpha \cup \partial(\beta)$ が成り立つ。ただし、∂ は connecting homomorphism を表すものとする。

(iv) 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^0(\Lambda,\Gamma,A)\otimes_{Z(\Lambda)}\mathrm{H}^0(\Lambda,\Gamma,B) & \xrightarrow{\cup} & \mathrm{H}^0(\Lambda,\Gamma,A\otimes_\Lambda B) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ A^\Lambda/N_{\Lambda/\Gamma}(A)\otimes_{Z(\Lambda)}B^\Lambda/N_{\Lambda/\Gamma}(B) & \longrightarrow & (A\otimes_\Lambda B)^\Lambda/N_{\Lambda/\Gamma}(A\otimes_\Lambda B) \end{array}$$

は可換である。ここで、縦方向の同型写像は定理１の同型写像であり、最下行の準同型写像は

$$(a+N_{\Lambda/\Gamma}(A))\otimes(b+N_{\Lambda/\Gamma}(B))\to a\otimes b+N_{\Lambda/\Gamma}(A\otimes_\Lambda B)$$

によって与えられる。

[5] では、[1, p.140] と同様に Λ の complete (P,S)-resolution X に diagonal approximation $\Delta : X\to X\otimes_\Lambda X$ が存在することを帰納法で示し、それを使って cup 積の存在を示している。そして、この cup 積は次の性質を持つ。

定理２ ([5](anti-commutativity)) M を 左 P-加群とするとき、任意の $\alpha\in\mathrm{H}^r(\Lambda,\Gamma,\Lambda)$, $\beta\in\mathrm{H}^s(\Lambda,\Gamma,M)$ に対して、$\alpha\cup\beta=(-1)^{rs}\beta\cup\alpha$ が成り立つ。

定理３ ([5](associativity)) A, B, C を 左 P-加群とするとき、任意の $\alpha\in\mathrm{H}^r(\Lambda,\Gamma,A)$, $\beta\in\mathrm{H}^s(\Lambda,\Gamma,B)$, $\gamma\in\mathrm{H}^s(\Lambda,\Gamma,C)$ に対して、$(\alpha\cup\beta)\cup\gamma=\alpha\cup(\beta\cup\gamma)$ が成り立つ。

これらの定義・定理によって直和 $\bigoplus_{r\in\mathbf{Z}}\mathrm{H}^r(\Lambda,\Gamma,\Lambda)$ は環になる。

3.Complete relative cohomology の準同型写像

この章以降では前２章のように Λ が可換環 K 上の algebra, Γ がその subalgebra で、環の拡大 Λ/Γ が Frobenius extension である前提に加えて、環の拡大 Γ/K も Frobenius extension であると仮定する。Λ/Γ, Γ/K が Frobenius extension であるので、Λ/K も Frobenius extension である。よって、左 P-加群 M に対して、$\mathrm{H}^r(\Lambda,K,M)$ が Λ の complete (P,K)-resolution Y より得られる。また、左 S-加群　M に対して、$\mathrm{H}^r(\Gamma,K,M)$ が Γ の complete (S,K)-resolution Z より得られる。（Γ/K が Frobenius extension であるので、$S=\mathrm{Im}\ (\Gamma\otimes_K\Gamma^o\to\Lambda\otimes_K\Lambda^o)\simeq\Gamma\otimes_K\Gamma^o$ である）ところで、$Q=\Gamma\otimes_K\Lambda^o$ とおくと、Q は 自然な準同型写像 $\Gamma\otimes_K\Lambda^o\to\Lambda\otimes_K\Lambda^o(=P)$ が単射であるので、P の部分環と見なせるが、Y と $Z\otimes_\Gamma\Lambda$ がともに Λ の complete (Q,K)-resolution になるため 左 P-加群 M に対して、同型

$$\mathrm{H}^r(\mathrm{Hom}({}_QY,{}_QM))\simeq\mathrm{H}^r(\mathrm{Hom}({}_QZ\otimes_\Gamma\Lambda,{}_QM))$$

が成り立つ。また、同型 $\mathrm{Hom}({}_QZ_r\otimes_\Gamma\Lambda,{}_QM)\simeq\mathrm{Hom}({}_SZ_r,{}_S\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda,M_\Lambda))\simeq\mathrm{Hom}({}_SZ_r,{}_SM)$ より

同型

$$\mathrm{H}^r(\mathrm{Hom}({}_QZ\otimes_\Gamma\Lambda,{}_QM))\simeq\mathrm{H}^r(\Gamma,K,M)$$

を得るが、この２つを合成して、同型

$$\mathrm{H}^r(\mathrm{Hom}({}_QY,{}_QM))\simeq\mathrm{H}^r(\Gamma,K,M)$$

が成り立つ。そして、自然な準同型写像 $\mathrm{Hom}({}_PY_r,{}_PM)\to\mathrm{Hom}({}_QY_r,{}_QM)$ より引き起こされる準同型写像

$$\mathrm{H}^r(\Lambda,K,M)\to\mathrm{H}^r(\mathrm{Hom}({}_QY,{}_QM))$$

と合成して、restriction homomorphism

$$\mathrm{Res}^r:\mathrm{H}^r(\Lambda,K,M)\to\mathrm{H}^r(\Gamma,K,M)\qquad(r\in\mathbf{Z})$$

を得る。また、上の同型

$$\mathrm{H}^r(\Gamma,K,M)\simeq\mathrm{H}^r(\mathrm{Hom}({}_QY,{}_QM))$$

を準同型写像 $\mathrm{Hom}({}_QY_r,{}_QM)\to\mathrm{Hom}({}_PY_r,{}_PM)$ ($f\in\mathrm{Hom}({}_QY_r,{}_QM)$ に対して $f\to[y\to\sum_i^n r_if(l_iy)]$) によって引き起こされる準同型写像

$$\mathrm{H}^r(\mathrm{Hom}({}_QY,{}_QM))\to\mathrm{H}^r(\Lambda,K,M)$$

と合成して、corestriction homomorphism

$$\mathrm{Cor}^r:\mathrm{H}^r(\Gamma,K,M)\to\mathrm{H}^r(\Lambda,K,M)\qquad(r\in\mathbf{Z})$$

を得る。

Λ の complete (P,K)-resolution Y の各左 P-加群 Y_r は (P,K)-projective であるが、環の拡大 P/K は Frobenius extension となるので、(P,K)-injective でもある。よって、Y は Λ の (P,K)-projective resolution と (P,K)-injective resolution をつなげて１つにしたものとみなせる。したがって、Λ の identity homomorphism が準同型写像

$$\mathrm{Inf}^r:\mathrm{H}^r(\Lambda,\Gamma,M)\to\mathrm{H}^r(\Lambda,K,M)\qquad r\geq1$$

および

$$\mathrm{Def}^r:\mathrm{H}^r(\Lambda,K,M)\to\mathrm{H}^r(\Lambda,\Gamma,M)\qquad r\leq-1$$

を引き起こす。(それぞれ inflation homomorphism, deflation homomorphism と呼ぶ）また、定理１の同型により、$\mathrm{H}^0(\Lambda,K,M)$ と $M^\Lambda/N_{\Lambda/K}(M)$, $\mathrm{H}^0(\Lambda,\Gamma,M)$ と $M^\Lambda/N_{\Lambda/\Gamma}(M)$ を同一視すると準同型写像 $\mathrm{H}^0(\Lambda,K,M)\to\mathrm{H}^0(\Lambda,\Gamma,M)$ ($m+N_{\Lambda/K}(M)\in\mathrm{H}^0(\Lambda,K,M)$ に対して、$m+N_{\Lambda/K}(M)\to m+N_{\Lambda/\Gamma}(M)$) が存在

するので、これを Def^0 と定義する。

上に述べた４つの準同型写像 Res^r, Cor^r, Inf^r, Def^r の間には次のような関係がある。

定理４ ([5]) N を左 P-加群とし、左 P-加群 N^i $(i \geq 0)$ を $N^0 = N$, $N^i = \mathrm{Hom}({}_QP, {}_QN^{i-1})$ $(i \geq 1)$ と帰納的に定義すると、$r \geq 1$ に対して $\mathrm{H}^n(\Gamma, K, N^{r-n}) = 0$ $(0 < n < r)$ ならば、

$$0 \to \mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, N) \overset{\mathrm{Inf}^r}{\to} \mathrm{H}^r(\Lambda, K, N) \overset{\mathrm{Res}^r}{\to} \mathrm{H}^r(\Gamma, K, N)$$

は完全である。

定理５ ([5]) M を左 P-加群とし、左 P-加群 M_i $(i \geq 0)$ を $M_0 = M$, $M_i = P \otimes_Q M_{i-1}$ $(i \geq 1)$ と帰納的に定義すると、$r \geq 0$ に対して $\mathrm{H}^{-n}(\Gamma, K, M_{r-n}) = 0$ $(0 \leq n \leq r-1)$ ならば、

$$0 \leftarrow \mathrm{H}^{-r}(\Lambda, \Gamma, M) \overset{\mathrm{Def}^{-r}}{\leftarrow} \mathrm{H}^{-r}(\Lambda, K, M) \overset{\mathrm{Cor}^{-r}}{\leftarrow} \mathrm{H}^{-r}(\Gamma, K, M)$$

は完全である。

定理４の証明は [3] による。定理５の証明は $r = 0$ の場合を証明し、帰納法により他の場合が証明される。

4.Cup 積と Complete relative cohomology の準同型写像

先の章で述べた Res^r と cup 積の関係については [7] で述べられている。[5] では cup 積と Inf^r, Def^r の間に次のような関係があることを示している。

命題１ ([5]) A, B を左 P-加群とし、α, β, α', β' をそれぞれ $\mathrm{H}^r(\Lambda, \Gamma, A)$, $\mathrm{H}^s(\Lambda, \Gamma, B)$, $\mathrm{H}^r(\Lambda, K, A)$, $\mathrm{H}^s(\Lambda, K, B)$ の元とするとき次の等式が成り立つ。

(1) $\mathrm{Inf}^{r+s}(\alpha \cup \beta) = \mathrm{Inf}^r(\alpha) \cup \mathrm{Inf}^s(\beta)$ $(r \geq 1,\ s \geq 1)$

(2) $\mathrm{Def}^{r+s}(\alpha' \cup \beta') = \mathrm{Def}^r(\alpha') \cup \mathrm{Def}^s(\beta')$ $(r \leq 0,\ s \leq 0)$

(3) $\mathrm{Def}^{r+s}(\alpha' \cup \mathrm{Inf}^s(\beta)) = \mathrm{Def}^r(\alpha') \cup \beta$ $(r < 0,\ s \geq 1,\ r+s \leq 0)$

(4) $\mathrm{Def}^{r+s}(\mathrm{Inf}^r(\alpha) \cup \beta') = \alpha \cup \mathrm{Def}^s(\beta')$ $(r \geq 1,\ s < 0,\ r+s \leq 0)$

(5) $\mathrm{Inf}^{r+s}(\mathrm{Def}^r(\alpha') \cup \beta) = \alpha' \cup \mathrm{Inf}^s(\beta)$ $(r \leq 0,\ s \geq 1,\ r+s \geq 1)$

(6) $\mathrm{Inf}^{r+s}(\alpha \cup \mathrm{Def}^s(\beta')) = \mathrm{Inf}^r(\alpha) \cup \beta'$ $(r \geq 1,\ s \leq 0,\ r+s \geq 1)$

この命題の証明は具体的な Λ の complete (P,S)-resolution と complete (P,K)-resolution を用いて Inf^r と Def^r を具体的に与えることと、帰納法を使うことによってすべての r, s について証明している。

References

[1] K.S. Brown, Cohomology of Groups, Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] R. Farnsteiner, On the cohomology of ring extensions, Advances in Math. 87(1991), 42–70.

[3] A. Hattori, On fundamental exact sequences, J. Math. Soc. Jap. 12(1960), 65–80.

[4] T. Nakayama, On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, Osaka Math. J. 9(1957), 165–187.

[5] T. Nozawa, On the complete relative cohomology of Frobenius extensions, Tsukuba J. Math. 17(1993), 99–113.

[6] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras, J. Pure Appl. Algebra 80(1992), 65–88.

[7] K. Sanada, On the cohomology of Frobenius algebras II, J. Pure Appl. Algebra 80(1992), 89–106.