

# 二面体群の整数係数ホッホシルト・コホモロジー環について

愛媛大学・理工学研究科 河野 貴臣 (Takaomi Kawano)  
Graduate school of science and engineering  
Ehime University

## 1. 序

この報告では、位数  $2$  冪の二面体群  $G = \langle x, y \mid x^{2^{n+1}} = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle$  について、そのホッホシルト・コホモロジー環  $HH^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G)$  の構造を決定することを目的とした。

定義 (Hochschild cohomology). 可換環  $R$ ,  $R$ -algebra  $\Lambda$ ,  $\Lambda$ -両側加群  $M$  に対して、 $M$  係数のホッホシルト・コホモロジー環は次で定義される。

$$HH^*(\Lambda, M) = \text{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda, M),$$

但し、 $\Lambda^e = \Lambda \otimes \Lambda^{op}$  とする。

一般に有限群  $G$  に対して、 $\Lambda = \mathbb{Z}G$  場合には、 $G$  の  $M$  への作用を共役で定義したときの普通のコホモロジー環  $H^*(G, M)$  と同型であることが知られている:

$$HH^*(\mathbb{Z}G, M) \simeq H^*(G, M).$$

今回考えるのは、特に  $\Lambda = M = \mathbb{Z}G$  の場合であり、この同型対応により  $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  を考えることと同値であることが分かる。従って、以下では  $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  について議論する。今  $G$  の共役類の分解を考えることにより、 $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  は次の様に直和分解されることが分かる。

$$H^*(G, \mathbb{Z}G) = H^*(G, \mathbb{Z}) \oplus H^*(G, \mathbb{Z}z) \oplus \left( \bigoplus_{1 \leq k \leq s-1} H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k}) \right) \oplus H^*(G, \mathbb{Z}C_y) \oplus H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}).$$

但し、ここで  $z = x^{2^n}$  とし、 $C_{x^k}, C_y, C_{yx}$  はそれぞれ  $x^k, y, yx$  を含む共役類とする。この直和分解における各項は、 $H^*(G, \mathbb{Z})$  の元との積について閉じているので、 $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  の生成元として、各項の  $H^*(G, \mathbb{Z})$  上の生成元を採用した。また、この直和分解において、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k}), H^*(G, \mathbb{Z}C_y), H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$  はそれぞれ  $H^*(\langle x \rangle, \mathbb{Z}x^k), H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y), H^*(\langle yx, z \rangle, \mathbb{Z}yx)$  からのコレストリクションとして導かれる。(但し、ここでの  $\mathbb{Z}x^k, \mathbb{Z}y, \mathbb{Z}yx$  への作用は共役で定義されることに注意する。) このことより、実際の計算にはフロベニウスの相互律を利用した。

最後にこの報告集を通して、次の記号はそれぞれ以下の意味で用いるものとする:

$$N = \sum_{t \in \langle x \rangle} t$$
$$E = \sum_{t \in C_y} t$$
$$D = \sum_{t \in C_{yx}} t$$

また、 $s, z$  は次の意味で用いる:

$$s = \frac{|x|}{2} = 2^n \quad z = x^s$$

## 2. 生成元

今回は、 $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  の生成元として、各項の  $H^*(G, \mathbb{Z})$  上の生成元を選んだ。この節ではそれらを、より扱いやすいコホモロジー群  $H^*(G, \mathbb{F}_2), H^*(G, \mathbb{Z}y)$  などに関連付けて紹介する。

2.1.  $H^*(G, \mathbb{Z})$  の構造.

命題 2.1.

$$H^*(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4]/I,$$

但し  $I$  は後述の関係式 (1),(6),(7) が生成するイデアルを意味する。

命題 2.2.

$$H^*(G, \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x^*, y^*, \omega]/(x^*(x^* + y^*)),$$

但し、 $x^*, y^*, \omega$  はそれぞれ次で定義される。

$$x^* : \begin{cases} x-1 \mapsto 1 \\ y-1 \mapsto 0 \end{cases}, y^* : \begin{cases} x-1 \mapsto 0 \\ y-1 \mapsto 1 \end{cases}, \omega : \begin{cases} (N, 0) \mapsto 1 \\ (y+1, x+1) \mapsto 0 \\ (0, y+1) \mapsto 0 \end{cases}.$$

$H^*(G, \mathbb{Z}), H^*(G, \mathbb{F}_2)$  の構造は、これらの命題 (2.1),(2.2) で与えられるが、ここでは  $H^*(G, \mathbb{Z})$  の生成元  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  をそれぞれ  $x^*, y^*, \omega$  に、 $\epsilon_4$  を  $H^*(\langle x \rangle, \mathbb{Z})$  の生成元  $\chi$  に関連付けて紹介する:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0$$

$\mathbb{Z}G$ -加群の定義より、次のコホモロジーの完全系列を導く。

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\Delta} & H^q(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & H^q(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } 2} H^q(G, \mathbb{F}_2) \\ & & & & \xrightarrow{\Delta} & H^{q+1}(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} \dots \end{array}$$

$H^*(G, \mathbb{Z})$  の生成元  $\epsilon_1, \epsilon_2$  はそれぞれ、連結準同型  $\Delta : H^1(G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(G, \mathbb{Z})$  による  $x^*, y^*$  の像として得られる。すなわち、

$$\epsilon_1 = \Delta(x^*), \epsilon_2 = \Delta(y^*).$$

同様に、 $\epsilon_3$  は連結準同型  $\Delta : H^2(G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(G, \mathbb{Z})$  による  $\omega$  の像として得られる。すなわち、

$$\epsilon_3 = \Delta(\omega).$$

次に、4 次の生成元  $\epsilon_4$  は  $H^2(\langle x \rangle, \mathbb{Z})$  から  $H^4(G, \mathbb{Z})$  への norm map による  $\chi \in H^2(\langle x \rangle, \mathbb{Z})$  の像として得られる。すなわち、

$$\epsilon_4 = \chi^{\otimes G},$$

但し、 $\chi$  は次で定義される。

$$\chi : N = \sum_{t \in \langle x \rangle} t \mapsto 1.$$

2.2.  $H^*(G, \mathbb{Z}z)$  の生成元.

$H^*(G, \mathbb{Z})$ -加群として、 $H^*(G, \mathbb{Z}z)$  は  $H^*(G, \mathbb{Z})$  と同型なので、 $H^*(G, \mathbb{Z}z)$  は  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$  に対応した元で生成される。ここではそれらを  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$  と表すことにする。すなわち、

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \Delta((x^*)_z), \\ \zeta_2 &= \Delta((y^*)_z), \\ \zeta_3 &= \Delta((\omega)_z), \\ \zeta_4 &= \chi_s^{\otimes G}. \end{aligned}$$

但し、 $(x^*)_z, (y^*)_z, \omega_z$  はそれぞれ次で定義され、 $\chi_s : N \mapsto z$  とする。

$$(x^*)_z : \begin{cases} x-1 \mapsto z \\ y-1 \mapsto 0 \end{cases}, (y^*)_z : \begin{cases} x-1 \mapsto 0 \\ y-1 \mapsto z \end{cases}, \omega_z : \begin{cases} (N, 0) \mapsto z \\ (y+1, x+1) \mapsto 0 \\ (0, y+1) \mapsto 0 \end{cases}.$$

### 2.3. $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$ の生成元.

Eckman-Shapiro の補題により  $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$  は  $H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y)$  から次のように得られる。

$$(A) \quad H^*(G, \mathbb{Z}C_y) = \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y).$$

これにより、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$  の構造を  $H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y)$  と関連付けて考えることができる。

命題 2.3.

$$H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha_y, \beta_y, \gamma_y] / ((\gamma^2)_y + (\alpha^2\beta)_y + (\alpha\beta^2)_y),$$

但し、 $\alpha_y, \beta_y \in H^2(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y)$ ,  $\gamma_y \in H^3(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y)$  はそれぞれ次のように定義される。

$$\alpha_y : \begin{cases} (z+1, 0) & \mapsto y \\ (y-1, -z+1) & \mapsto 0 \\ (0, y+1) & \mapsto 0 \end{cases} \quad \beta_y : \begin{cases} (z+1, 0) & \mapsto 0 \\ (y-1, -z+1) & \mapsto 0 \\ (0, y+1) & \mapsto y \end{cases}$$

$$\gamma_y : \begin{cases} (z+1, 0, 0) & \mapsto 0 \\ (y-1, -z-1, 0) & \mapsto y \\ (0, y+1, z-1) & \mapsto -y \\ (0, 0, y-1) & \mapsto 0 \end{cases}.$$

このとき次の命題が成り立つ。

命題 2.4.  $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$  は  $H^*(G, \mathbb{Z})$  上次の元で生成される。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\alpha_y + \beta_y), \\ \eta_2 &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\beta_y), \\ \eta_3 &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\gamma_y), \\ \eta_4 &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G ((\alpha^2)_y + (\alpha\beta)_y). \end{aligned}$$

*Proof.* 命題 (2.3) で見たように、 $H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y)$  は  $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$  で生成され、それらの次数は順に 2, 2, 3 であった。従って、(A) により、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$  の 2 次、3 次部分それぞれ  $\mathbb{Z}$ -加群として次のように得られる：

$$\begin{aligned} H^2(G, \mathbb{Z}C_y) &= \langle \eta_1, \eta_2 \rangle, \\ H^3(G, \mathbb{Z}C_y) &= \langle \eta_3 \rangle. \end{aligned}$$

次に、 $H^4(G, \mathbb{Z}C_y)$  は  $\mathbb{Z}$ -加群として、 $\text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\alpha^2)_y, \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\alpha\beta)_y, \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\beta^2)_y$  で生成されることが分かる。しかし、 $\text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\alpha\beta)_y, \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\beta^2)_y$  は  $\epsilon_2$  を用いて次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\alpha\beta)_y &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G ((\text{res}_{\langle y, z \rangle} \epsilon_2) \cdot \alpha_y) = \epsilon_2 \cdot \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G \alpha_y \\ \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G (\beta^2)_y &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G ((\text{res}_{\langle y, z \rangle} \epsilon_2) \cdot \beta_y) = \epsilon_2 \cdot \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G \beta_y \end{aligned}$$

但し、ここでの計算には後述の補題 (3.1) を用いた。従って、

$$H^4(G, \mathbb{Z}C_y) \subset H^*(G, \mathbb{Z})[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4].$$

を得る。同様に 5, 6 次部分についても、

$$H^5(G, \mathbb{Z}C_y), H^6(G, \mathbb{Z}C_y) \subset H^*(G, \mathbb{Z})[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4].$$

と成ることが分かる。以下帰納的に、より高次の元についても  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  の四つの元で生成される。  $\square$

### 2.4. $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$ の生成元.

$H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$  の場合と同様に、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$  は  $H^*(\langle yx, z \rangle, \mathbb{Z}yx)$  からのコレストリクションとして得られる：

$$H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \text{cor}_{\langle yx, z \rangle}^G H^*(\langle yx, z \rangle, \mathbb{Z}yx).$$

従って、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$  の場合と同様にして、次の命題が得られる。

命題 2.5.  $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$  は  $H^*(G, \mathbb{Z})$  上次の元で生成される:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \text{cor}_{\langle yx, z \rangle}^G (\alpha_{yx} + \beta_{yx}), \\ \theta_2 &= \text{cor}_{\langle yx, z \rangle}^G (\beta_{yx}), \\ \theta_3 &= \text{cor}_{\langle yx, z \rangle}^G (\gamma_{yx}), \\ \theta_4 &= \text{cor}_{\langle yx, z \rangle}^G ((\alpha^2)_{yx} + (\alpha\beta)_{yx}).\end{aligned}$$

但し、 $\alpha_{yz}, \beta_{yx}, \gamma_{yx}$  はそれぞれ  $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$  に対応する  $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$  の元とする。

*Proof.* 証明は命題 (2.4) の場合と同様。 □

2.5.  $H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$  の生成元. 各  $1 \leq k \leq s-1$  に対して、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$  は  $H^*(\langle x \rangle, \mathbb{Z}x^k)$  からのコレストリクシオンとして得られる:

$$H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k}) = \text{cor}_{\langle x \rangle}^G H^*(\langle x \rangle, \mathbb{Z}x^k).$$

ここで、 $\chi_k \in H^*(\langle x \rangle, \mathbb{Z}x^k)$  を次のように定義する。

$$\chi_k : N \mapsto x^k.$$

命題 2.6. このとき、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$  は  $H^*(G, \mathbb{Z})$  上次の元で生成される。

$$\begin{aligned}\xi_{(k,2)} &= \text{cor}_{\langle x \rangle}^G \chi_k \quad , \text{ where } \chi_k \in H^2(\langle x \rangle, \mathbb{Z}x^k) \\ \xi_{(k,4)} &= \text{cor}_{\langle x \rangle}^G \chi_k \quad , \text{ where } \chi_k \in H^4(\langle x \rangle, \mathbb{Z}x^k)\end{aligned}$$

以上より、 $H^*(G, \mathbb{Z})$  上の  $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  の生成元として次が得られた。

	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$
$H^q(G, \mathbb{Z})$	$\epsilon_1 = \Delta(x^*)$ $\epsilon_2 = \Delta(y^*)$	$\epsilon_3 = \Delta(\omega)$	$\epsilon_4 = \chi^{\otimes G}$
$H^q(G, \mathbb{Z}z)$	$\zeta_1 = \Delta((x^*)_z)$ $\zeta_2 = \Delta((y^*)_z)$	$\zeta_3 = \Delta(\omega_z)$	$\zeta_4 = \chi_s^{\otimes G}$
$H^q(G, \mathbb{Z}C_y)$	$\eta_1 = (\alpha_y + \beta_y) \uparrow_{\langle y, z \rangle}^G$ $\eta_2 = (\beta_y) \uparrow_{\langle y, z \rangle}^G$	$\eta_3 = (\gamma_y) \uparrow_{\langle y, z \rangle}^G$	$((\alpha^2)_y + (\alpha\beta)_y) \uparrow_{\langle y, z \rangle}^G$
$H^q(G, \mathbb{Z}C_{yx})$	$\theta_1 = (\alpha_{yx} + \beta_{yx}) \uparrow_{\langle yx, z \rangle}^G$ $\theta_2 = (\beta_{yx}) \uparrow_{\langle yx, z \rangle}^G$	$\theta_3 = (\gamma_{yx}) \uparrow_{\langle yx, z \rangle}^G$	$\theta_4 = ((\alpha^2)_{yx} + (\alpha\beta)_{yx}) \uparrow_{\langle yx, z \rangle}^G$
$H^q(G, \mathbb{Z}x^k)$	$\xi_{(k,2)} = \chi_k \uparrow_{\langle x \rangle}^G$		$\xi_{(k,4)} = \chi_k \uparrow_{\langle x \rangle}^G$

余白の都合上、ここでは  $\uparrow$  でコレストリクシオンを表した。

### 3. 基本関係式

前節では、 $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  の生成元を、それぞれ  $H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z}y)$  の生成元などに関連付けて紹介した。このような関連付けを生成元に与えることで、積を計算するのにフロベニウスの相互律を用いることが出来る。以下では、この有用性に着目して  $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  の基本関係式を紹介する。

各生成元の位数を考えることにより、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2\epsilon_1 = 2\epsilon_2 = 2\epsilon_3 = 2s\epsilon_4 = \bar{0}, \\ (2) \quad & 2\zeta_1 = 2\zeta_2 = 2\zeta_3 = 2s\zeta_4 = \bar{0}, \\ (3) \quad & 2s\xi_{(k,2)} = 2s\xi_{(k,4)} = \bar{0}, \\ (4) \quad & 2\eta_1 = 2\eta_2 = 2\eta_3 = 2\eta_4 = \bar{0}, \\ (5) \quad & 2\theta_1 = 2\theta_2 = 2\theta_3 = 2\theta_4 = \bar{0}. \end{aligned}$$

$H^*(G, \mathbb{Z}G)$  の直和分解において、各直和因子はそれぞれ  $H^*(G, \mathbb{Z})$ -加群であった。また、特に  $H^*(G, \mathbb{Z}z)$  は  $H^*(G, \mathbb{Z})$ -加群として  $H^*(G, \mathbb{Z})$  と同型であり、 $\bigoplus_{1 \leq k \leq s-1} H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$ ,  $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$ ,  $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$  は  $H^*(G, \mathbb{Z}z)$ -加群でもある。このことに注意して、最初に  $\eta$ ,  $\theta$  型生成元と  $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  の元との積の間の関係を考える。

1.  $H^*(G, \mathbb{Z})$  において、次の関係式が成り立つことが知られている:

$$\begin{aligned} (6) \quad & (\epsilon_1)^2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_1 = \bar{0}, \\ (7) \quad & (\epsilon_3)^2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 = \bar{0}. \end{aligned}$$

一方  $z^2 = 1$  であり、先に述べたように  $H^*(G, \mathbb{Z})$ -加群として  $H^*(G, \mathbb{Z})$  と  $H^*(G, \mathbb{Z}z)$  は同型なので、 $\eta$  型生成元と  $\theta$  型生成元との間には次の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned} (8) \quad & \epsilon_h \cdot \epsilon_k = \zeta_h \cdot \zeta_k \quad (h, k \in \{1, 2, 3, 4\}). \\ (9) \quad & \epsilon_h \cdot \zeta_k = \epsilon_k \cdot \zeta_h \quad (h, k \in \{1, 2, 3, 4\}). \end{aligned}$$

2. 次に、 $\epsilon$  型生成元と  $\bigoplus_{1 \leq k \leq s-1} H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$  の元との積について、 $\text{res}_{\langle x \rangle} \epsilon_2 = \text{res}_{\langle x \rangle} \epsilon_3 = \bar{0}$  なので、 $\epsilon_2, \epsilon_3$  に対して、次の (9) ~ (12) が得られる:

$$\begin{aligned} (10) \quad & \epsilon_2 \cdot \xi_{(k,2)} = \bar{0}, \\ (11) \quad & \epsilon_2 \cdot \xi_{(k,4)} = \bar{0}, \\ (12) \quad & \epsilon_3 \cdot \xi_{(k,2)} = \bar{0}, \\ (13) \quad & \epsilon_3 \cdot \xi_{(k,4)} = \bar{0}. \end{aligned}$$

また、 $\text{res}_{\langle x \rangle} \epsilon_1 : N \rightarrow s$  なので、 $\epsilon_1$  との積について次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} (14) \quad & \epsilon_1 \cdot \xi_{(k,2)} = s\xi_{(k,4)}, \\ (15) \quad & \epsilon_1 \cdot \xi_{(k,4)} = s\epsilon_4 \cdot \xi_{(k,2)}. \end{aligned}$$

一方、 $z \cdot x^k = x^{k+s}$  なので、 $\eta$  型と  $\xi$  型の積、 $\theta$  型と  $\xi$  型の積の間には次の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned} (16) \quad & \zeta_h \cdot \xi_{(k,2)} = \epsilon_h \cdot \xi_{(k+s,2)} \quad (h \in \{1, 2, 3, 4\}), \\ (17) \quad & \zeta_h \cdot \xi_{(k,4)} = \epsilon_h \cdot \xi_{(k+s,4)} \quad (h \in \{1, 2, 3, 4\}). \end{aligned}$$

3.  $\eta$  型生成元と  $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$  の元との積について考えるために、先ず次の補題を導入する。

補題 3.1.

$$\begin{aligned} \text{res}_{\langle y, z \rangle} \epsilon_1 &= \bar{0}, \quad \text{res}_{\langle y, z \rangle} \epsilon_2 = \beta, \quad \text{res}_{\langle y, z \rangle} \epsilon_3 = \gamma, \\ \text{res}_{\langle y, z \rangle} \epsilon_4 &= (\alpha^2 + \alpha\beta). \end{aligned}$$

但し、 $\alpha, \beta, \gamma$  は命題 (2.3) の中で定義した  $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$  に対応する  $H^*(\langle y, z \rangle, \mathbb{Z})$  の生成元とする。

この補題により、

$$(18) \quad \epsilon_1 \times H^*(G, \mathbb{Z}C_y) = \bar{0}.$$

である。更に、命題 (2.4) を用いて、その他の  $\eta$  型生成元と  $\eta_2, \eta_3, \eta_4$  との積について次の関係式が得られる:

$$(19) \quad \epsilon_4 \cdot \eta_2 = \epsilon_2 \cdot \eta_4 = \epsilon_3 \cdot \eta_3,$$

$$(20) \quad \epsilon_3 \cdot \eta_2 = \epsilon_2 \cdot \eta_3,$$

$$(21) \quad \epsilon_3 \cdot \eta_4 = \epsilon_4 \cdot \eta_3.$$

これと同様の関係式が  $\zeta$  型生成元と  $\eta$  型生成元との積においても成り立ち、それらの間は次の関係で結ばれる:

$$(22) \quad (\eta_h + \epsilon_h) \cdot \eta_k = \bar{0} \quad (h, k \in \{2, 3, 4\}).$$

最後に、 $\eta_1$  との積について次の関係が成り立つ:

$$(23) \quad (\epsilon_h + \zeta_h) \cdot \eta_1 = \epsilon_h \cdot \eta_2 \quad (h \in \{2, 3, 4\}).$$

4.  $\eta$  型との積の場合と同様に、 $\epsilon$  型の生成元と  $\theta$  型生成元との積についても先に補題を一つ導入する。

補題 3.2.

$$\begin{aligned} \text{res}_{\langle yx, z \rangle} \epsilon_1 &= \beta', \quad \text{res}_{\langle yx, z \rangle} \epsilon_2 = \beta', \quad \text{res}_{\langle yx, z \rangle} \epsilon_3 = \gamma', \\ \text{res}_{\langle yx, z \rangle} \epsilon_4 &= \alpha'(\alpha' + \beta'). \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha', \beta', \gamma'$  はそれぞれ、 $\alpha_{yx}, \beta_{yx}, \gamma_{yx}$  に対応する  $H^*(\langle yx, z \rangle, \mathbb{Z})$  の生成元とする。

この補題により、 $\epsilon_1, \epsilon_2$  と  $\theta$  型生成元との間に、次の関係が存在する:

$$(24) \quad (\epsilon_1 + \epsilon_2) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0}.$$

また、その他の  $\epsilon$  型生成元と  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$  との積について、この補題と命題 (2.5) により次の関係式が得られる:

$$(25) \quad \epsilon_2 \cdot \theta_4 = \epsilon_4 \cdot \theta_2 = \epsilon_3 \cdot \theta_3,$$

$$(26) \quad \epsilon_2 \cdot \theta_3 = \epsilon_3 \cdot \theta_2,$$

$$(27) \quad \epsilon_3 \cdot \theta_4 = \epsilon_4 \cdot \theta_3.$$

これらの関係式が、 $\zeta$  型生成元と  $\theta$  型生成元との積についても成り立ち、更にそれらは次の関係で結ばれる:

$$(28) \quad (\zeta_1 + \zeta_2) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0},$$

$$(29) \quad (\epsilon_h + \zeta_h) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0} \quad (h \in \{2, 3, 4\}).$$

命題 (2.6) で見たように、各  $1 \leq k \leq s-1$  について  $\xi_{(k,2)}, \xi_{(k,4)}$  はそれぞれ次のように定義された:

$$\xi_{(k,2)} = \text{cof}_{\langle x \rangle}^G \chi_k \quad (\deg \chi_k = 2),$$

$$\xi_{(k,4)} = \text{cof}_{\langle x \rangle}^G \chi_k \quad (\deg \chi_k = 4).$$

一方、 $\xi_{(k,2)}, \xi_{(k,4)}$  の  $\langle x \rangle$  への制限はつぎで与えられる:

補題 3.3.

$$\text{res}_{\langle x \rangle} \xi_{(k,2)} = \chi_{s+k} - \chi_k,$$

$$\text{res}_{\langle x \rangle} \xi_{(k,4)} = \chi_{s+k} + \chi_k.$$

従って、 $\xi$  型生成元同士の積について次の関係が成り立つ:

$$(30) \quad \xi_{(k,2)} \cdot \xi_{(l,2)} = \xi_{(k+l,4)} - \xi_{(k-l,4)},$$

$$(31) \quad \xi_{(k,2)} \cdot \xi_{(l,4)} = \xi_{(k+l,2)} \cdot \epsilon_4 + \xi_{(k-l,2)} \cdot \epsilon_4,$$

$$(32) \quad \xi_{(k,4)} \cdot \xi_{(l,4)} = \xi_{(k+l,4)} \cdot \epsilon_4 + \xi_{(k-l,4)} \cdot \epsilon_4.$$

また、 $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$  の  $\langle z \rangle$  への制限は次で与えられる:

補題 3.4.

$$\text{res}_{\langle z \rangle} \alpha_y : z + 1 \mapsto y \quad \text{res}_{\langle z \rangle} \beta_y = \bar{0} \quad \text{res}_{\langle z \rangle} \gamma_y = \bar{0}.$$

この補題 (3.4) と補題 (3.3) を用いて、次のように  $\eta$  型生成元と  $\xi$  型生成元との積を計算することができる:

$$\begin{aligned} \eta_1 \cdot \xi_{(k,2)} &= \text{cor}_{\langle x \rangle}^G \left( \left( \text{cor}_{\langle z \rangle}^{\langle x \rangle} \text{res}_{\langle z \rangle} (\alpha_y + \beta_y) \right) \cdot \chi_k \right) \\ &= \text{cor}_{\langle x \rangle}^G \left( \left( \text{cor}_{\langle z \rangle}^{\langle x \rangle} \text{res}_{\langle z \rangle} \alpha_y \right) \cdot \chi_k \right) \\ &= \text{cor}_{\langle x \rangle}^G \text{res}_{\langle x \rangle} \eta_4 = \bar{0}. \end{aligned}$$

また、これ以外の元の積についてもこのように考えて、結果として次の関係式を得る:

$$(33) \quad H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k}) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_y) = \bar{0}.$$

同様に、 $\theta$  型生成元と  $\xi$  型生成元との積についても次の関係式を得る:

$$(34) \quad H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k}) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0}.$$

最後に、 $H^*(G, \mathbb{Z}C_y) \oplus H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$  の元同士の積について、紹介する。

$$\begin{aligned} \eta_4 \cdot \theta_4 &= \text{cor}_{\langle yx, z \rangle}^G \left( (\alpha^2)_{yx} + (\alpha\beta)_{yx} \right) \cdot \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G \left( (\alpha^2)_y + (\alpha\beta)_y \right) \\ &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G \left[ \left( \text{res}_{\langle y, z \rangle} \text{cor}_{\langle yx, z \rangle}^G \left( (\alpha^2)_{yx} + (\alpha\beta)_{yx} \right) \right) \cdot \left( (\alpha^2)_y + (\alpha\beta)_y \right) \right] \\ &= \text{cor}_{\langle y, z \rangle}^G \left[ \left( \text{cor}_{\langle z \rangle}^{\langle y, z \rangle} \sum_{0 \leq k \leq \frac{s}{2} - 1} \text{res}_{\langle z \rangle} \text{con}^{x^k} \left( (\alpha^2)_{yx} + (\alpha\beta)_{yx} \right) \right) \cdot \left( (\alpha^2)_y + (\alpha\beta)_y \right) \right] \\ (\diamond) \quad &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{s}{2} - 1} \text{cor}_{\langle x \rangle}^G \left[ \text{cor}_{\langle z \rangle}^{\langle x \rangle} \left( \text{res}_{\langle z \rangle} \text{con}^{x^k} \left( (\alpha^2)_{yx} + (\alpha\beta)_{yx} \right) \cdot \text{res}_{\langle z \rangle} \left( (\alpha^2)_y + (\alpha\beta)_y \right) \right) \right] \end{aligned}$$

ここで、次のことに注意する:

$$\begin{aligned} \text{cor}_{\langle z \rangle}^{\langle x \rangle} \left( \text{res}_{\langle z \rangle} \text{con}^{x^k} \left( (\alpha^2)_{yx} + (\alpha\beta)_{yx} \right) \right) \cdot \text{res}_{\langle z \rangle} \left( (\alpha^2)_y + (\alpha\beta)_y \right) \\ = (N \mapsto s x^{-2k-1}) = s \chi_{-2k-1} \end{aligned}$$

従って、 $(\diamond)$  は次の様に変形される:

$$\begin{aligned} \diamond &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{s}{2} - 1} \text{cor}_{\langle x \rangle}^G (s \chi_{-2k-1}) \\ &= s \sum_{1 \leq k: \text{odd} \leq s-1} \xi_{(k,4)} \cdot \zeta_4 \end{aligned}$$

命題 (2.4), (2.5) により、 $\eta_1$  と  $\theta_1$  の積はこのように得られるが、その他の元の積についても同様に考えられ、その結果として次の関係式を得る:

1.  $\eta$  型生成元同士の積について、

$$(35) \quad \eta_2 \cdot \eta_2 = \bar{0}$$

$$(36) \quad \eta_2 \cdot \eta_3 = \bar{0}$$

$$(37) \quad \eta_2 \cdot \eta_4 = \bar{0}$$

$$(38) \quad \eta_3 \cdot \eta_3 = \bar{0}$$

$$(39) \quad \eta_3 \cdot \eta_4 = \bar{0}$$

$$(40) \quad \eta_4 \cdot \eta_4 = \sum_{k:\text{even}, k \neq 0, s} \xi_{(k,4)} \cdot \epsilon_4 + s\epsilon_4 \cdot \epsilon_4 + s\zeta_4 \cdot \epsilon_4$$

$$(41) \quad \eta_2 \cdot \eta_1 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1 \cdot \zeta_2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_2 \cdot \zeta_2$$

$$(42) \quad \eta_3 \cdot \eta_1 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 + \zeta_1 \cdot \epsilon_3 + \zeta_2 \cdot \epsilon_3$$

$$(43) \quad \eta_4 \cdot \eta_1 = \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 + \zeta_2 \cdot \epsilon_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 + \zeta_1 \cdot \epsilon_4 + \sum_{2 \leq k:\text{even} \leq s-2} \epsilon_1 \cdot \xi_{(k,4)}$$

$$(44) \quad \eta_1 \times \eta_1 = s \sum_{2 \leq k:\text{even} \leq s-2} \xi_{(k,4)} + s\epsilon_4 + s\zeta_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_2$$

2.  $\theta$  型生成元同士の積において、

$$(45) \quad \theta_2 \cdot \theta_2 = \bar{0}$$

$$(46) \quad \theta_3 \cdot \theta_2 = \bar{0}$$

$$(47) \quad \theta_4 \cdot \theta_2 = \bar{0}$$

$$(48) \quad \theta_3 \cdot \theta_3 = \bar{0}$$

$$(49) \quad \theta_4 \cdot \theta_3 = \bar{0}$$

$$(50) \quad \theta_4 \cdot \theta_4 = \eta_4 \cdot \eta_4$$

$$(51) \quad \theta_1 \cdot \theta_2 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1 \cdot \zeta_2$$

$$(52) \quad \theta_1 \cdot \theta_3 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 + \epsilon_1 \cdot \zeta_3$$

$$(53) \quad \theta_1 \cdot \theta_4 = s \sum_{2 \leq k:\text{even} \leq s-2} \xi_{(k,2)} \cdot \epsilon_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 + \epsilon_1 \cdot \zeta_4$$

$$(54) \quad \theta_1 \cdot \theta_1 = s \sum_{2 \leq k:\text{even} \leq s-2} \xi_{(k,4)} + s\epsilon_4 + s\zeta_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$$

3.  $\eta$  型生成元と  $\theta$  型生成元との積について、次の関係が成り立つ:



$$\begin{aligned}
(55) \quad & \eta_2 \cdot \theta_2 = \bar{0} \\
(56) \quad & \eta_3 \cdot \theta_2 = \eta_2 \cdot \theta_3 = \bar{0} \\
(57) \quad & \eta_4 \cdot \theta_2 = \eta_2 \cdot \theta_4 = \bar{0} \\
(58) \quad & \eta_3 \cdot \theta_3 = \bar{0} \\
(59) \quad & \eta_4 \cdot \theta_3 = \eta_3 \cdot \theta_4 = \bar{0} \\
(60) \quad & \eta_4 \cdot \theta_4 = s \sum_{1 \leq k: \text{odd} \leq s-1} \xi_{(k,4)} \cdot \epsilon_4 \\
(61) \quad & \eta_1 \cdot \theta_2 = \theta_1 \cdot \eta_2 = \bar{0} \\
(62) \quad & \eta_1 \cdot \theta_3 = \theta_1 \cdot \eta_3 = \bar{0} \\
(63) \quad & \theta_1 \cdot \eta_4 = \eta_1 \cdot \theta_4 \\
(64) \quad & \eta_1 \cdot \theta_1 = s \sum_{1 \leq k: \text{odd} \leq s-1} \xi_{(k,4)}
\end{aligned}$$

#### 4. $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の構造

命題 4.1.

$$H^*(G, \mathbb{Z}G) \simeq \mathbb{Z}[\mathcal{G}] / (\mathcal{L}),$$

但し、 $\mathcal{G}$  は 2 節で紹介した生成元の集合、 $\mathcal{L}$  は 3 節で紹介した関係式全部 (1 ~ 64) の集合とする。

この節では、この命題の証明を簡単に紹介する。

(準備)

補題 4.2. 各  $q$  に対して、 $H^q(G, \mathbb{Z})$ ,  $H^q(G, \mathbb{Z}z)$  の位数は次で与えられる。

1.  $q : \text{odd}$  のとき、 $2^{\frac{q-1}{2}}$ ,
2.  $q \equiv 2 \pmod{4}$  のとき、 $2^{\frac{q+2}{2}}$ ,
3.  $q \equiv 0 \pmod{4}$  のとき、 $2^{\frac{q}{2}} + 2s$ .

補題 4.3. 各  $q$  に対して、 $H^q(G, \mathbb{Z}C_y)$ ,  $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$  の位数は次で与えられる。

1.  $q : \text{even}$  のとき、 $2^{\frac{q+2}{2}}$ ,
2.  $q : \text{odd}$  のとき、 $2^{\frac{q-1}{2}}$ .

補題 4.4. 各  $q$  に対して、 $\bigoplus_{1 \leq k \leq s-1} H^q(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$  の位数は次で与えられる。

1.  $q : \text{odd}$  のとき、0,
2.  $q \equiv 2 \pmod{4}$  のとき、 $(2s)^{s-1}$ ,
3.  $q \equiv 0 \pmod{4}$  のとき、 $(2s)^{s-1}$ .

今、先に紹介した生成元と関係式によって定義される環  $\mathcal{F}$  を次の様に定義する。次に、 $\mathcal{I}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{X}$  を次で定義する。

定義.

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{I_1, I_2, I_3, I_4\} \\ \mathcal{Z} &= \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} \\ \mathcal{E} &= \{E_1, E_2, E_3, E_4\} \\ \mathcal{D} &= \{D_1, D_2, D_3, D_4\} \\ \mathcal{X} &= \{X_{(k,2)}, X_{(k,4)}\} \quad (1 \leq k \leq s-1)\end{aligned}$$

今、対応  $f$  を次で定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 \mapsto I_1 \\ \epsilon_2 \mapsto I_2 \\ \epsilon_3 \mapsto I_3 \\ \epsilon_4 \mapsto I_4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 \mapsto Z_1 \\ \zeta_2 \mapsto Z_2 \\ \zeta_3 \mapsto Z_3 \\ \zeta_4 \mapsto Z_4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \xi_{(k,2)} \mapsto X_{(k,2)} \\ \xi_{(k,4)} \mapsto X_{(k,4)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1 \leq k \leq s-1) \\ (1 \leq k \leq s-1) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 \mapsto E_1 \\ \eta_2 \mapsto E_2 \\ \eta_3 \mapsto E_3 \\ \eta_4 \mapsto E_4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \mapsto D_1 \\ \theta_2 \mapsto D_2 \\ \theta_3 \mapsto D_3 \\ \theta_4 \mapsto D_4 \end{array} \right.$$

この対応を用いて、抽象的に望む構造を持つ環を  $\mathcal{F}$  とする:

$$\mathcal{F} = \mathbb{Z}[\mathcal{G} \text{ を対応 } f \text{ で書き換えたもの}] / (\mathcal{L} \text{ を対応 } f \text{ で書き換えたもの}).$$

補題 4.5.  $\mathcal{F}_q$  ( $\mathcal{F}$  の  $q$  次成分全体) において、次が成り立つ。

$$\mathcal{F}_q = \mathfrak{J}_q + \mathfrak{Z}_q + \mathfrak{E}_q + \mathfrak{D}_q + \mathfrak{X}_q \quad (q \geq 0).$$

ただし、 $\mathfrak{J}_q, \mathfrak{Z}_q, \mathfrak{E}_q, \mathfrak{D}_q, \mathfrak{X}_q \subset \mathcal{F}$  は、それぞれ次で定義される。

定義.  $\mathfrak{J}_q$  は次の元で生成される  $\mathbb{Z}$ -加群:

1.  $q$ : 奇数のとき,

$$\begin{aligned}I_4^i I_2^j I_3 & \quad , 4i + 2j + 3 = q \\ I_4^i I_2^j I_1 I_3 & \quad , 4i + 2j + 5 = q\end{aligned}$$

2.  $q$ : 偶数のとき,

$$I_4^i I_2^j \quad , 4i + 2j = q$$

$\mathfrak{Z}_q$  は次の元で生成される  $\mathbb{Z}$ -加群:

1.  $q$ : 奇数のとき,

$$\begin{aligned}I_4^i I_2^j Z_3 & \quad , 4i + 2j + 3 = q \\ I_4^i I_2^j I_3 Z_1 & \quad , 4i + 2j + 5 = q\end{aligned}$$

2.  $q$ : 偶数のとき,

2.a.  $q \equiv 2 \pmod{4}$  ならば,

$$I_4^i Z_2^j \quad , 4i + 2j = q$$

2.b.  $q \equiv 0 \pmod{4}$  ならば,

$$\begin{aligned}I_4^i Z_2^j & \quad , 4i + 2j = q \quad i \geq 1 \\ I_4^i Z_4 & \quad , 4i + 4 = q\end{aligned}$$

$\mathfrak{E}_q$  は次の元で生成される  $\mathbb{Z}$ -加群:

1.  $q$  : 奇数のとき,

$$\begin{aligned} I_4^i I_2^j I_3 E_1 & , 4i + 2j + 5 = q \\ I_4^i I_2^j E_3 & , 4i + 2j + 3 = q \end{aligned}$$

2.  $q$  : 偶数のとき,

2.a.  $q \equiv 2 \pmod{4}$  ならば,

$$\begin{aligned} I_4^i I_2^j E_1 & , 4i + 2j + 2 = q \\ I_4^i I_2^j E_2 & , 4i + 2j + 2 = q \end{aligned}$$

2.b.  $q \equiv 0 \pmod{4}$  ならば,

$$\begin{aligned} I_4^i I_2^j E_1 & , 4i + 2j + 2 = q \\ I_4^i I_2^j E_2 & , 4i + 2j + 2 = q \\ I_4^i E_4 & , 4i + 4 = q \end{aligned}$$

$\mathfrak{D}_q$  は次の元で生成される  $\mathbb{Z}$ -加群:

1.  $q$  : 奇数のとき,

$$\begin{aligned} I_4^i I_2^j I_3 D_1 & , 4i + 2j + 5 = q \\ I_4^i I_2^j D_3 & , 4i + 2j + 3 = q \end{aligned}$$

2.  $q$  : 偶数のとき,

2.a.  $q \equiv 2 \pmod{4}$  ならば,

$$\begin{aligned} I_4^i I_2^j D_1 & , 4i + 2j + 2 = q \\ I_4^i I_2^j D_2 & , 4i + 2j + 2 = q \end{aligned}$$

2.b.  $q \equiv 0 \pmod{4}$  ならば,

$$\begin{aligned} I_4^i I_2^j D_1 & , 4i + 2j + 2 = q \\ I_4^i I_2^j D_2 & , 4i + 2j + 2 = q \\ I_4^i D_4 & , 4i + 4 = q \end{aligned}$$

$\mathfrak{X}_q$  ( $q$ :偶数) は次の元で生成される  $\mathbb{Z}$ -加群:

1.  $q \equiv 2 \pmod{4}$  ならば,

$$I_4 X_{(k,2)} \quad (1 \leq k \leq s-1).$$

2.  $q \equiv 0 \pmod{4}$  ならば,

$$I_4 X_{(k,4)} \quad (1 \leq k \leq s-1).$$

命題 4.1 の証明.  $\mathcal{F}$  から  $H^*(G, \mathbb{Z}G)$  への全射準同型が存在するが、各次数  $q$  での位数を比較することにより、これは同型であることを示したい。補題 (4.5) により

$$\mathcal{F} = \bigoplus_q (\mathfrak{J} + \mathfrak{J} + \mathfrak{E} + \mathfrak{D} + \mathfrak{X}).$$

である。この事と、補題 (4.2) ~ (4.4) を用いて、各次数  $q$  について  $\mathcal{F}_q$  の位数は高々  $|H^q(G, \mathbb{Z}G)|$  であり、 $\mathcal{F} \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G)$  を得る。□

## REFERENCES

- [1] David Handel, *On products in the cohomology of the dihedral groups*. Tohoku Math. J. (2) **45**(1993),no.1,13-42.
- [2] Stephen f. Siegel And Sarah J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra*. Proc. London Math. Soc. (3) **79**(1999), no.1, 131-157
- [3] Tsunenobu Asai, Hiroki Sasaki, *The mod 2 cohomology algebras of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups*. Comm. Algebra **21** (1993), no.8, 2771-2790
- [4] Edwin Weiss, *Cohomology of Groups*. Academic Press (1969)
- [5] C.B.Thomas, *Characteristic classes and the cohomology of finite groups*. Cambridge University Press. (1986)