Control of fusion and cohomology of finite groups

埼玉大学教育学部　飛田明彦 (Akihiko Hida)
Faculty of education, Saitama University

1 Introduction

G を有限群, k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする. [S2] において, P. Symonds は次の結果を示している.

Theorem 1.1 ([S2, Theorem 4.1]). $H^*(-, k)$ は (k-ベクトル空間の) inflation functor として全ての cohomological simple functor を組成因子に持つ.

[S2] ではこれを用いて次の Mislin の定理の別証明を与えている.

Theorem 1.2 ([M, Theorem], [S2, Theorem 1.1]). H は G の部分群で, 指数 $|G : H|$ は p と素であるものとする. このとき次は同値である.
(1) 制限写像

$$\mathrm{res}_{G,H} : H^*(G, k) \longrightarrow H^*(H, k)$$

は同型写像.
(2)H の p-部分群 Q と $x \in G$ について, ${}^xQ \subseteq H$ ならば $x \in HC_G(Q)$ である.

もとの Mislin の結果は Lie 群に関するものであり, 有限群の場合に群論的, あるいは代数的な証明が望まれている. [S2] での Theorem 1.1 の証明も, 代数的位相幾何学の深い結果を用いている. これについては, 亀子氏の解説を参照して下さい.

一方, ひとつの群 G について考えると Theorem 1.1 より次が得られる.

Corollary 1.3 ([S2, Corollary 4.2]). P を G の p-部分群, V を既約 $k(N_G(P))$-加群とし, $S_{P,V}$ を対応する既約 Mackey functor とする. このとき次は同値である.
(1) ある $n \geq 0$ に対して, $S_{P,V}$ は Mackey functor の組成因子として, $H^n(-, k)$ に含まれる.
(2)V は $k(N_G(P)/PC_G(P))$-加群.

実は Theorem 1.2 を示すためにはこの Corollary で十分である. 3 章では [S2] の議論に従い, Mackey functor と部分群の fusion がどの様に関係あるのか, Corollary 1.3 からどの様に Mislin の定理が導かれるか説明したい.

[S2] にもあるように, Corollary 1.3 はある種の置換加群を用いて言い換えることができる. P を G の p-部分群, V を既約 $kN_G(P)$-加群とする. kG-加群 $M_{P,V}^G$

を, V の $k(N_G(P)/P)$-加群としての projective cover を $kN_G(P)$-加群とみたものの Green 対応として定義する. これは vertex が P である直既約加群である. 4 章では Corollary 1.3 は次と同値であることを説明する.

Theorem 1.4 ([S2, Theorem 5.3]). *p-部分群 P と既約 $k(N_G(P))$-加群 V について, 次は同値である.*
(1)$H^*(G, M^G_{P,V}) \neq 0$.
(2)V は $k(N_G(P)/PC_G(P))$-加群.

奥山氏の講演にもあった様に, これに関しては群論的, あるいは有限群のモヂュラー表現論を用いた証明が得られている ([O],[H]). よって有限群の場合の Mislin の定理について代数的な証明が与えられたことになる. また, [R] にも関連した話題が述べられている.

2 Mackey functor

ここでは Mackey functor, 特に既約な Mackey functor について簡単にまとめる. ここではひとつの群 G に対する Mackey functor のみ扱うこととする. Global Mackey funactor, inflation functor 等については [W] を参照して下さい. M が cohomological Mackey functor とは, 各 $H \leq G$ に対し, k-ベクトル空間 $M(H)$ が与えられ, また $K \leq H \leq G$, $g \in G$ に対し線形写像,

$$t^H_K : M(K) \longrightarrow M(H)$$
$$r^H_K : M(H) \longrightarrow M(K)$$
$$c_g : M(H) \longrightarrow M({}^gH)$$

が決められていて次の公理を満たすものである.
(1)t^H_H, r^H_H, c_h $(h \in H)$ は $M(H)$ の恒等写像.
(2)$J \leq K \leq H \leq G$, $g, h \in G$ に対して,

$$t^H_K t^K_J = t^H_J,\ r^K_J r^H_K = r^H_J,\ c_g c_h = c_{gh}$$
$$r^{{}^gH}_{{}^gK} c_g = c_g r^H_K,\ t^{{}^gH}_{{}^gK} c_g = c_g t^H_K.$$

(3)$J, K \leq H \leq G$ に対して次の Mackey 公式が成立する.

$$r^H_J t^H_K = \sum_{x \in J\backslash H/K} t^J_{J\cap {}^xK} r^{{}^xK}_{J\cap {}^xK} c_x.$$

(4)$K \leq H$ に対して,

$$t^H_K r^H_K = |H : K|.$$

Mackey functor に対し, subfunctor, quotient, 既約性, 組成因子などが自然に定義される. 既約な cohomological Mackey functor は分類されており, p-部分群 P と既約 $kN_G(P)$-加群 V の組 (P, V) (共役と同型を除く) で parametrize される ([TW1], [TW2]). (P, V) に対応する既約な Mackey functor を $S_{P,V}$ で表す. $k(N_G(P)/P)$-加群として $S_{P,V}(P) \cong V$ となっている.

3 Fusion and Mackey Functor

G の p-部分群 Q を固定する．$H \leq G$ に対し，

$$T_G(Q,H) = \{x \in G \mid {}^xQ \subseteq H\}$$

とおく．この集合には H と $C_G(Q)$ がそれぞれ左と右から作用している．

$$H \backslash T_G(Q,H)/C_G(Q) = \{HxC_G(Q) \mid x \in T_G(Q,H)\}$$

とおく．G に対する Mackey functor M_Q を次の様に定義する．
$H \leq G$ に対し，

$$M_Q(H) = k(H \backslash T_G(Q,H)/C_G(Q))$$

とする．また $K \leq H \leq G$, $g \in G$ に対し，

$$t_K^H : M_Q(K) \longrightarrow M_Q(H)$$

$$KxC_G(Q) \longmapsto HxC_G(Q)$$

$$r_K^H : M_Q(H) \longrightarrow M_Q(K)$$

$$HxC_G(Q) \longmapsto \sum_{h \in [K \backslash H], hx \in T_G(Q,K)} K(hx)C_G(Q)$$

$$c_g : M_Q(H) \longrightarrow M_Q({}^gH)$$

$$HxC_G(Q) \longmapsto {}^gH(gx)C_G(Q)$$

とおく．この M_Q について次が成立する．

Theorem 3.1. (1)M_Q は cohomological Mackey functor である．
(2)$g \in C_G(H)$ ならば c_g は $M_Q(H)$ の恒等写像である．
(3) 任意の既約 $k(N_G(Q)/QC_G(Q))$-加群 V に対して，M_Q は $S_{Q,V}$ を組成因子として含んでいる．

(1) は定義を順次確認していけば良い．(2) を確認しておこう．$x \in T_G(Q,H)$, $g \in C_G(H)$ とすると，$z \in Q$ について，

$${}^{x^{-1}gx}z = {}^{x^{-1}g}({}^xz) = z$$

なので $x^{-1}gx \in C_G(Q)$ つまり $gx \in xC_G(Q)$ である．よって ${}^gH(gx)C_G(Q) = HxC_G(Q)$ である．また (3) については，$Q_1 < Q$ ならば $M_Q(Q_1) = 0$ であり，また $M_Q(Q) = k(N_G(Q)/QC_G(Q))$ であることから分かる．

一方 M_Q の定義から $Q \leq H \leq G$ のとき，$\dim M_Q(H) = 1$ となるための必要十分条件は $T_G(Q,H) = HC_G(Q)$ であることがわかる．

ここまで準備をした上で，([S2] に従い) Corollary 1.3 から Theorem 1.2 が導かれることを示そう．$G \geq H$, $|G:H|$ は p と素とする．

$$\mathrm{res} : H^*(G,k) \longrightarrow H^*(H,k)$$

が同型であるということは, Corollary 1.3 より, 全ての p-部分群 P と任意の既約 $k(N_G(P)/PC_G(P))$-加群 V について

$$r^G_H : S_{P,V}(G) \longrightarrow S_{P,V}(H)$$

が同型ということと同値である. 一方 Theorem 3.1 よりこれは全ての p-部分群 Q に対し,

$$r^G_H : M_Q(G) \longrightarrow M_Q(H)$$

が同型, すなわち $\dim M_Q(H) = 1$ となることと同値であり, これは H の任意の p-部分群 Q について $T_G(Q,H) = HC_G(Q)$ となること, つまり Theorem 1.2 (2) と同値である.

4 Cohomology of trivial source modules

P を G の p-部分群, V を既約 $kN_G(P)/P$-加群とする. P_V を V の $k(N_G(P)/P)$-加群としての projective cover とする. P_V を $kN_G(P)$-加群と考え, その Green 対応である kG-加群を [O] に従い $M^G_{P,V}$ と表すことにする. [S2] に従い Corollary 1.3 を置換加群の言葉に言い換えよう.

Proposition 4.1 ([TW2, (16.10) Proposition]). *fixed point functor* すなわち 0 次の *cohomology* $H^0(-, M^G_{P,V})$ は *cohomological Mackey functor* としての $S_{P,V}$ の *projective cover* である.

これより, $S_{P,V}$ が $H^n(-,k)$ の組成因子ということは,

$$\mathrm{Ext}^n_{kG}(M^G_{P,V}, k) \cong \mathrm{Hom}(H^0(-, M^G_{P,V}), H^n(-,k)) \neq 0$$

と同じことである. 双対加群 $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ を考えるとこれは,

$$H^n(G, M^G_{P,V^*}) \neq 0$$

と同値であることになり, 結局 Corollary 1.3 は Theorem 1.4 と同値となった訳である.

Theorem 1.4 は trivial source を持つ加群の cohomology と, p-部分群の中心化群に関する主張であり [BCR] との関係を考えるのは自然であろう. 実際, [BCR] の予想を一般に解決した [B2] での結果を用いて, 表現論的な証明を与えることができる. 以下 Theorem 1.4 の証明の概略を述べることにする. 詳しくは [H] を参照して下さい.

(1) $\Rightarrow$ (2). $H^n(G, M^G_{P,V}) \neq 0$ ならば S_{P,V^*} は $H^n(-,k)$ の組成因子となり, $k(N_G(P)/P)$-加群として V^* は $H^n(P,k)$ に現れる. $C_G(P)$ は $H^*(P,k)$ に自明に作用するので, V^* は (そして V も) $k(N_G(P)/PC_G(P))$-加群である.

(2) $\Rightarrow$ (1). E を P の中心に含まれる位数 p の部分群とする.

(i)$G = C_G(E)$ のとき. これは spectral sequence を用いて示される ([S1] と同様

のアイデアによる).

(ii)$G = N_G(E)$ のとき. これは $N_G(E)/C_G(E)$ が巡回 p'-群であることから [BCR, section 6] と同様の議論を用いて証明される.

(iii) 最後に一般の場合. $M = M^G_{P,V}$, $H = N_G(E)$ とする. 既約 $k(N_H(P)/PC_H(P))$-加群 V' で $M' = M^H_{P,V'}$ が $M \downarrow_H$ の直和因子となるものが存在する. 以下, 加群の variety に関する用語については [B1] を参照して下さい.

$\sqrt{\text{Ker res}_{G,E}}$ の生成元 $\zeta_1, \ldots \zeta_r$ に対して, 対応する Carlson 加群 L_{ζ_i} の tensor 積を L とすると,

$$V_G(L) = \text{res}^*_{G,E}((V_E(k))$$

となっている. [B2, Theorem 3.1] より kH-加群 X で

$$X \uparrow^G \cong L \oplus (\text{projective})$$

となるものが存在する. X も (多少の修正が必要だがほぼ) $I = \sqrt{\text{Ker res}_{H,E}}$ の適当な元 $\eta_0, \eta_1, \ldots$ に対応する Carlson 加群の tensor 積となっているとしてよい. 完全列

$$0 \longrightarrow L_{\zeta_i} \longrightarrow \Omega^{n_i}(k) \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

より, $\widehat{\text{Ext}}^*_{kG}(L, M) \neq 0$ ならば $H^*(G, M) \neq 0$ となることがわかる.

$$\widehat{\text{Ext}}^*_{kG}(L, M) \cong \widehat{\text{Ext}}^*_{kG}(X \uparrow^G, M) \cong \widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(X, M)$$

より ((ii) で示した $H^*(H, M') \neq 0$ から) $\widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(X, M') \neq 0$ を導けば良いことになる. $A = H^*(H, k)$ とおく. [E, Proof of Theorem 10.3.1] より A における $H^*(H, M')$ の annihilator は I に含まれていることがわかる.

Lemma 4.2. *U, W を kH-加群, $\eta \in I$ とする. このとき*

$$\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(U, W) \subseteq I$$

ならば

$$\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(U \otimes L_\eta, W) \subseteq I.$$

Proof. $B = \widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(U, W)$ とおく. $\deg \eta = n$ とすると, 完全列

$$\widehat{\text{Ext}}^i_{kH}(U, W) \longrightarrow \widehat{\text{Ext}}^{i+n}_{kH}(U, W) \longrightarrow \widehat{\text{Ext}}^i_{kH}(U \otimes L_\eta, W)$$

より $\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(U \otimes L_\eta) \subseteq \text{rad ann}_A B/\eta B$ となる. $\text{ann}_A B \subseteq I$ なので, prime ideal I に関する局所化を考えると $B_I \neq 0$ であり, 中山の補題より $B_I \neq IB_I$ つまり $B_I \neq \eta B_I$ となる. よって $\text{ann}_A B/\eta B \subseteq I$. □

X は $\otimes L_{\eta_i}$ であったから, Lemma 4.2 を繰り返し用いると,

$$\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(X, M') \subseteq I$$

つまり $\widehat{\text{Ext}}^*_{kH}(X, M') \neq 0$ が得られる. よって Theorem 1.4 が証明されたことになる.

References

[B1] D. J. Benson, *Representations and cohomology II: cohomology of groups and modules*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 31, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

[B2] D. J. Benson, *Cohomology of modules in the principal block of a finite group*, New York J. Math. 1(1995), 196-205.

[BCR] D. J. Benson, J. F. Carlson and G. R. Robinson, *On the vanishing of group cohomology*, J. Algebra 131(1990), 40-73.

[E] L. Evens, *The cohomology of groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, (1991).

[H] A. Hida, *Control of fusion and cohomology of trivial source modules*, preprint.

[M] G. Mislin, *On group homomorphisms inducing mod-p cohomology isomorphisms*, Comment. Math. Helvetici 65(1990), 454-461.

[O] T. Okuyama, *Cohomology isomorphisms and control of fusion*, preprint, (2005).

[R] G. R. Robinson, *Arithmetical properties of blocks*, in Algebraic groups and their representaions, R. W. Cater and J. Saxl eds., Kluwer, Dordrecht, (1998), 213-232.

[S1] P. Symonds, *The action of automorphisms on the cohomology of a p-group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 127(1999), 495-496.

[S2] P. Symonds, *Mackey functors and control of fusion*, Bull. London Math. Soc. 36(2004), 623-632.

[TW1] J. Thévenaz and P. J. Webb, *Simple Mackey functors*, Proc. of 2nd International Group Theory Conferance, Bressanone(1989), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 23(1990), 299-319.

[TW2] J. Thévenaz and P. J. Webb, *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. 347(1995), 1865-1961.

[W] P. J. Webb, *Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces*, J. Pure Appl. Algebra 88(1993), 265-304.